EL VIAJANTE DE COMERCIO

Claudio Verrastro *

RESUMEN:

Se propone una metodología, con expansión polinómica cúbica, para la solución óptima del viajante de comercio; problema clásico dela investigación operativa, que crece en forma exponencial con el número de nodos. Esta metodología esta basada en reglas que proponen acotar el problema en forma convergente, de forma tal que la solución mínima es la primera que cumple con las condiciones detener N caminos y conectar a todas las ciudades.

1 - INTRODUCCION:

El problema se define sobre un grafo, en el cual hay que encontrar la ruta de menor costo, que une cada uno de los nodos (deben ser visitados sólo una vez), retornando al nodo origen.
En principio se supone un grafo de conexión completa, es decir que existen caminos que conectan todos los nodos con cada uno de los restantes. Pero se puede extender directamente suponiendo que los caminos inexistentes tienen costo elevado o infinito.

2 - DEFINICIONES:

n = nodo a visitar se lo denota con un número natural.

Cij = costo del camino que une el nodo i con el nodo j los caminos son reversibles es decir Cij = Cji

N = número total de nodos del grafo.

Ruta = es el conjunto de N caminos con costos Cij donde cada nodo está nombrado sólo dos veces y existe un solo lazo.

Arco = extremo de un camino que termina en un nodo

3 - MAGNITUD DEL PROBLEMA:

El número de rutas posibles son las permutaciones de N nodos tomados de a N sobre un círculo (comienzo y final fijos).

$$NR = (N-1)!$$

Si se toman como idénticas las rutas recorridas en ambos
sentidos, este número se reduce a la mitad.

[1] Grupo de Inteligencia Artificial UTN - FRBA

Para N = 10 el numero de rutas es 181.440
Para N = 11 el número de rutas es 1.814.400
......
Para N = 100 el número de rutas es 1,9 10157

Es decir que para cantidades de nodos relativamente pequeñas se torna imposible la búsqueda exhaustiva de la ruta mínima, aún para la más poderosa computadora imaginable.

El número de caminos en un grafo de N nodos es la combinatoria de N nodos tomados de a dos (para el caso de un grafo de conexión (completa).

$$NC = N(N-1)/ 2!$$

Para su mejor visualización los costos de los caminos se pondrán
en una matriz triangular superior de N - 1 x N - 1, denominada diagrama de Ver.

$$\begin{array}{ccc} C12 & C13 \;.... & C1N \\ & C23 \;.... & C2N \\ & .... & C3N \\ & .... & \\ & & Cn-1,N \end{array}$$

4 - REGLAS:

Reglas: son mecanismos que se utilizan para limitar el carácter exponencial del problema y tornarlo tratable.

En nuestro caso se expondrá un conjunto de reglas que intentan garantizar el hallazgo del camino mínimo mediante una expansión polinómica cúbica.

Regla 1:

Se seleccionar como caminos candidatos a formar el recorrido óptimo, a los "dos" de menor costo
(de los N-1) que acceden a cada nodo.

Se supone que seleccionando estos caminos se podrá entrar y salir de cada nodo por los accesos más cortos.
De esta manera, se reduce a 2.N el número de caminos a considerar.

De los 2.N caminos seleccionados, se eliminan aquellos que estan repetidos.
Usando la propiedad $Cij = Cji$

COROLARIO 1:
Es posible probar que habrá al menos 3 caminos mínimos repetidos. Es decir que habrá,no menos de 3 caminos, que son mínimo común de dos nodos (ver apéndice A).

Entonces el número máximo de caminos seleccionados por R1 será:
$$NCS = 2\,N - 3$$
No obstante nuestro objetivo es encontrar una Ruta, formada por N caminos.

En el peor de los casos habrá N - 3 caminos de más que se deben eliminar. El exceso máximo de caminos se puede expresar como:

$$EC = NCS - N \,(N - 3$$

La forma en que se eliminan los caminos de aquellos nodos que aun tienen mas de dos arcos que concurren a él, es motivo de un cuidadoso análisis.

Para el cómputo del número de arcos (NAi) que concurren en un nodo, basta con contar las repeticiones de un mismo subíndice, en los costos de los caminos seleccionados por R1 (ya sea en la posición i como en la j).
El exceso de arcos en cada nodo será entonces:

$$EAi = NAi - 2$$

El exceso total de arcos se puede expresar

$$EA = Sum (EAi) = 2 EC$$

Definición:

Puente es un camino que une dos nodos y reemplaza a dos caminos seleccionados por R1 por otro distinto a los reemplazados. Así dados los caminos C12 y C34 seleccionados por la R1
Los caminos C13, C14, C23 y C24 son puentes.

Si reemplazamos dos caminos por alguno de sus puentes podemos eliminar arcos de dos nodos sin modificar el número de arcos de los dos restantes Es así que si removemos de la selección los caminos C12 y C24 y en su lugar agregamos puente C13, se elimina un arco del nodo 2 y otro del nodo 4, sin modificar los arcos de los nodos 1 y 3.

Regla 2:

En caso que EC = 0 se habrá encontrado una ruta mínima (se debe verificar la existencia de mas de un lazo).

Si EC > 0 entonces armar los puentes sobre los caminos seleccionados como indica a continuación.

Sobre el conjunto de caminos seleccionados por R1; tomados de a pares, (Cij, Ckl), se forman todos los puentes y se computan los "Ahorros" definidos para los costos de estos caminos de la siguiente manera:

$Ajl = Cij + Ckl - Cik$
$Ajk = Cij + Ckl - Cil$
$Ail = Cij + Ckl - Cjk$
$Aik = Cij + Ckl - Cjl$

los Ahorros en que los puentes son caminos seleccionados por R1 no se computaran de este modo sino que directamente se toma Aij = Cij.

Solo serán válidos aquellos Aii con EAi > 1 y aquellos Aij con Eai y Eaj>0

5 - EVALUACION DE LA MAGNITUD DEL PROBLEMA DESPUES DE LA APLICACION DE LAS REGLAS

Se vio que después de aplicar R1, el máximo número de caminos a considerar en el grafo es:

$$NCS = 2N - 3$$

El número total de extremos de arcos involucrados (es equivalente a la suma de caminos que accede a cada nodo).

$$NA = 2 (2N - 3) = 4N - 6$$

El número de caminos en exceso será

$$EC = N - 3$$

El número total de arcos en exceso es:

$$EA = 2N - 6$$

COROLARIO 2:

Se puede demostrar que por lo menos habrá un nodo que tiene solo dos arcos que acceden a él. Es decir que la matriz A tendrá como máximo dimensión N-1,

Pero para la determinación de los elementos de la matriz A se deberán efectuar los cálculos indicados por R2 (NR2). Que es un número menor a 4 veces la combinatoria del numero de caminos seleccionados tomados de a dos.

$$NR2 <= 2\ NCS\ (NCS - 1) = 2\ (2N - 3)\ (2N - 4) = 8N^2 - 28N + 24$$

Es un polinomio en N^2

La matriz A definida por R2 tiene por objeto eliminar arcos en aquellos nodos que tienen mas de dos, para lo cual se deberán seleccionar tantos elementos de la matriz A como arcos en exceso (EA) queden despues de la aplicación de R1.

Entonces se buscaran los EC Aij que en conjunto produzcan un Ahorro máximo.

$$Amax = Aij + ... + Amn$$

El problema de encontrar Amax es semejante al de encontrar la ruta mínima, pero esta vez el problema se ha reducido en 1 columna y una fila pues deberá existir un mínimo de un nodo con solo dos arcos que confluyen a el. Para esto se aplica recursivamente las Reglas 1,2 pero con ligeras modificaciones.
Regla 1':

En la matriz A se seleccionan los EAi mayores Aij [menores Gij], compatibles de cada nodo, teniendo en cuenta que los Ann [Gnn] se deben tomar como dobles.

Se eliminan los Aij [Gij] repetidos. Los Aij (Gij) son iguales si provienen de la eliminación de los mismos caminos y el agregado del mismo puente

Se cuentan los arcos que convergen a cada nodo (NA'i).

Regla 2':

Computar el exceso de arcos de los nodos como:

$$EA'i = NA'i - EAi$$

$$EA' = Sum (EA'i)$$

Si EA' = 0, entonces verificar su compatibilidad (esto es, que dos o mas de los Aij [Gij] seleccionados no impliquen la eliminación de un mismo camino o el agregado de un mismo puente). Ejecutar la solución verificando la cantidad de lazos.

Si alguno de los EA'i > 0 entonces armar los puentes como se indica a continuación.
Sobre el conjunto de Aij seleccionados por R1' tomados de a pares (Aij, Akl) se formar n todos los puentes de orden 0 y orden 1 y se computar n los "Gastos" definidos para los valores de Aij de la siguiente manera:

$$Gjl = Aij + Akl - Aik$$

$$Gjk = Aij + Akl - Ail$$
$$Gil = Aij + Akl - Ajk$$
$$Gik = Aij + Akl - Ajl$$

los gastos en que los puentes Aik, Ail, Ajk, Ajl son Ahorros seleccionados por R1' no se computaran de este modo sino que directamente se toma Gij = Aij.

Solo serán validos aquellos Gii con EA'i > 1 y aquellos Gij con EA'i y EA'j>0.

Como el problema se redujo en, al menos un nodo, N'= N - 1. El numero de funciones gasto a calcular es:

$$NFG = 2\ N'A\ \ (N'A - 1)$$

$$NFG = 2\ (\ 2\ N - 7\ )\ (2\ N - 8)$$

Donde N'A = 2N - 7 es el numero de arcos preseleccionados por R1'.

De esta manera en cada paso, el orden de magnitud del problema se irá reduciendo, buscando alternadamente mínimos y máximos.
Es decir se llamara recursivamente a las reglas R1' y R2' usando la parte entre corchetes cuando estemos buscando un mínimo
La magnitud de la solución total del problema entonces será de N^2 en cada uno de a lo sumo N-3 niveles decrecientes es decir que la complejidad total será de a lo sumo N^3

6-CONCLUSIONES:

El procedimiento hasta aquí descripto tiene dos dificultades:

a) No discrimina si un conjunto de funciones Amax (o Gmin) es compatible o no.
Esto es, puede ocurrir que dos funciones Aij, Akl requieran la eliminación de un mismo camino, o bien el agregado de un mismo puente. En este caso se deber buscar la primer solución subóptima compatible. Esto, dependiendo del problema, puede ser una tarea no trivial.

b) No detecta la presencia de mas de un lazo. Es decir, podría resultar como ruta mínima, dos o mas lazos disjuntos.
En este caso también, se deber buscar la primera solución subóptima.
También se puede aplicar el método que propone Richard Karp que propone vincular los lazos como si fueran nuevos nodos y siguiendo un mecanismo parecido al del método Avaro (Joseph^Kruskal Bell Lab.)

Como ventaja, es capaz de puntualizar situaciones en las cuales, el hecho de no pasar mas de una vez por un nodo es más costoso que hacerlo (cuando hay algún A negativo).
Por otra parte cuando la solución mínima esta compuesta por mas de un lazo, esta indicando la conveniencia de emplear mas de un agente.

ANEXO A

DEMOSTRACION DEL COROLARIO 1

Podemos enunciar el corolario de la regla 1 como:

Para N >= 3 el numero de caminos seleccionados por la regla 1 es menor o igual a 2 N - 3

Lo demostraremos por induccion para el primero N = 3 la demostración es trivial ya que a cada nodo concurren solo dos caminos, es decir que se seleccionaran todos los arcos que concurren a cada vértice como el numero de arcos es 3

Ncs = N = 3 = 2 .N -3

Si suponemos que se cumple para el caso de N nodos

Ncs <= 2.N - 3

mostraremos que se cumple para N+1 nodos

Al agregar el nuevo nodo N+1 también debemos agregar N caminos entre los cuales se encontraran los dos menores correspondientes al nodo N+1, en el peor de los caso estos N nuevos caminos serán todos mayores que los 2N-3 seleccionados previamente, en
tal caso la selección anterior no se modificará y habrá que agregar los dos caminos menores correspondientes al nodo N+1 Entonces el número de caminos seleccionados en el caso de N=1 nodos será

Ncs <= 2.N - 3 + 2 = 2.(N+1) - 3

Que es lo que queríamos demostrar.

7 - REFERENCIAS:

1-Wagner H. (75) Principles of Operations Research. Prentice Hall

2-Hiller F.S. and Liberman G.J. (74) Introduction to Operations Research. Holden Day

3-Held M. and Karp R. (70) The traveling salesman problem and minimum spanning trees. Operations Research vol. 18 pp 1138-1162

4-Lin S. Computer solutions of the traveling salesman problem. Bell system Tech. Journal vol XLIV,Nø 10, dec (65)

5-Cook S.A. An overview of computational complexity, Comunications of the ACM June 83 Vol 26 Nø 6.

6-Stockmeyer L.J. Chandra A.K. Problemas intrínsecamente difíciles. Investigación y Ciencia.

7-Lewis H.R. y Papadimitriou Ch.H. La eficiencia de los algoritmos. Investigación y Ciencia.