

## Control PID con Filtro Dinámico de Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente (dEWMA-PID)

Claudio Verrastro<sup>1,2</sup>, Juan Carlos Gómez<sup>2,3</sup>, Pablo D. Folino<sup>2</sup>, Sergio Alberino<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup> CNEA, Centro Atómico Ezeiza

<sup>2</sup> Grupo de Inteligencia Artificial UTN-FRBA, Buenos Aires, Argentina,

<sup>3</sup> Instituto Nacional de Tecnología Industrial (INTI).

<sup>4</sup> Instituto Universitario de la Policía Federal Argentina (IUPFA)

cverra@cae.cnea.gov.ar; alberino@gmail.com; pfolino@hotmail.com; juanca@inti.gov.ar

**Resumen-** Se propone una versión de control PID cuyos términos son calculados por medio de un filtro recursivo basado en Promedios Móviles Ponderados Exponencialmente. Los parámetros del filtro se ajustan dinámicamente en función del valor de la señal de error, a fin de obtener una respuesta que satisfaga las condiciones de velocidad y rechazo al ruido. Este algoritmo hace uso de la información estadística del error de medición, a la vez que tiene bajos requerimientos de procesamiento y es de simple implementación, siendo ideal para su uso en sistemas de tiempo real y robots móviles.

**Keywords**—PID, Moving Average, IIR, EWMA.

### 1. INTRODUCCION

En un trabajo anterior [1] se presentó un criterio estático para el ajuste del filtrado de ruido en un control de posición PID digital. En esta ocasión se propone un criterio más simple, con el fin de reducir el tiempo de cálculo y obtener un mejor desempeño del sistema.

Se comparará el comportamiento del mismo frente a un algoritmo PID discreto [2], tomando como referencia tres parámetros dinámicos: Tiempo de crecimiento (*Rise Time*), Tiempo de establecimiento (*Settling Time*) y el sobreimpulso (*Overshoot*), y dos parámetros estáticos: Error en régimen permanente (*Steady State Error*) y el índice de *Fletcher & Powell* [3]

Las ecuaciones para un controlador de posición PID discreto son [2]:

$$U[n] = K_p \cdot e[n] + K_i \cdot i[n] \cdot T_s + K_d \cdot d[n] / T_s, \quad (1)$$

Donde:  $U[n]$  es la acción de control,  $e[n]$  es el error calculado como la diferencia entre la consigna y el estado de la planta y

$$d[n] = (e[n] - e[n-1]), \quad (2)$$

$$i[n] = \sum e[n]; \quad (3)$$

El término derivativo  $d[n]$  se calcula como la diferencia entre el valor actual del error  $e[n]$ , y la muestra anterior  $e[n-1]$  y el término integral se calcula como la sumatoria de todos los errores  $e[n]$ .  $T_s$  es el intervalo de muestreo. Para determinar el valor de  $T_s$  se debe tener en cuenta las características dinámicas de la planta. Las reglas del arte fijan generalmente:

$$T_s \leq T_p/10, \quad (4)$$

Donde  $T_p$ , es la constante de tiempo dominante de la planta [4].

Para sintonizar la respuesta de la planta se debe ajustar correctamente los parámetros propios del controlador ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ). Existen varios métodos de ajuste, siendo uno de los más conocidos el de *Ziegler-Nichols* [2].

En la práctica aparecen varios inconvenientes en la implementación de este tipo de controlador, principalmente debido a problemas de ruido eléctrico en la señal de entrada. Siendo que la variable de error  $e[n]$  se calcula como la diferencia entre la señal de entrada (medición del estado de la planta) y el valor de consigna o *set point*, cuando el sistema alcanza el régimen estacionario,  $e[n]$  toma un valor cercano a cero, pero el error relativo en esa condición es alto. En el caso particular de la derivada, como se calcula como  $e[n]-e[n-1]$ , el valor del ruido puede resultar dominante y producir efectos de inestabilidad.

Para solucionar este problema se suelen emplear filtros pasa-bajos en la entrada de la señal, mejorando la respuesta en el régimen permanente en desmedro de la velocidad de reacción en el transitorio.

En este trabajo se aprovechan las propiedades de reducción de ruido del filtro EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), adaptadas dinámicamente a lo largo del ciclo de control de modo de no perder velocidad en la respuesta del sistema en régimen transitorio y mejorar la inmunidad al ruido, en régimen estacionario.

### 2. DESARROLLO

#### 2.1. Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente

La técnica de la media móvil o *moving average* es muy utilizada para obtener promedios sobre muestras a medida que estas "van ingresando". La idea del promedio consiste en tomar  $N$  muestras, sumarlas y dividir las por  $N$ . El promedio es "móvil" cuando se recalcula cada vez que se obtiene una nueva muestra tomando las  $N$  muestras anteriores.

Por razones de economía de memoria y velocidad de cálculo muy a menudo se adopta la fórmula recursiva

$$P[n] = P[n-1] + (e[n] - P[n-1])/N, \quad (5)$$

Llamada Promedio Móvil Ponderado Exponencialmente (PMPE) o Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) porque las muestras más recientes tienen una ponderación mayor que las antiguas y, tal como se puede ver en [5], su comportamiento corresponde a un filtro tipo IIR (Infinite-duration Impulse Response).

La expresión analítica de la respuesta a un escalón es:

$$P[n] = e[0].(1 - ((N-1)/N)^{n+1})$$

Es posible caracterizar su respuesta temporal al escalón en forma muy aproximada [6] con la fórmula:

$$P[n] = e[0].(1 - e^{-n/N})$$

El promedio móvil alcanzará 1-1/e de su valor final después de N muestras, por lo que a este valor N se lo llamará constante de promediación del filtro e introduce un retardo  $\tau$ :

$$\tau = N \cdot T_s, \quad (6)$$

Siendo que a lo largo del ciclo de control propuesto se varía dinámicamente la constante de promediación y por lo tanto la cantidad de muestras promediadas, denominamos a este filtro dEWMA.

Este filtro se utiliza por sus características de supresión de ruido. En los casos en que la señal de ruido que afecta a la entrada tiene valor medio cero, el filtro cancela los efectos en su salida [7].

Para este análisis se ha supuesto que el ruido superpuesto a la señal de entrada es de tipo Gaussiano, con valor medio cero y varianza  $\sigma^2$  conocida (o estimada).

La reducción de ruido del filtro EWMA es más efectiva que el promedio de N muestras. La varianza del filtro EWMA se puede expresar como [8]:

$$\sigma_{PN}^2 = \sigma^2 / (2N-1), \quad (7)$$

No existe un único valor del N que reduzca el ruido y al mismo tiempo introduzca un retardo que sea compatible con la operación normal del sistema. En régimen transitorio el valor de N debe ser bajo ya que el error  $e[n]$  es grande (la componente de ruido es proporcionalmente pequeña) y se requiere una respuesta rápida. Para el régimen permanente  $e[n]$  tiende a cero, el valor de N debe ser alto para reducir el efecto del ruido.

## 2.2. Solución propuesta

En este trabajo se aprovechan las propiedades de reducción de ruido del filtro dEWMA y la posibilidad de ajuste de acuerdo a la condición de la planta. En el esquema de la Figura 1 se introduce en el lazo un módulo

dEWMA, que es el encargado de calcular las variables de entrada al controlador PID.

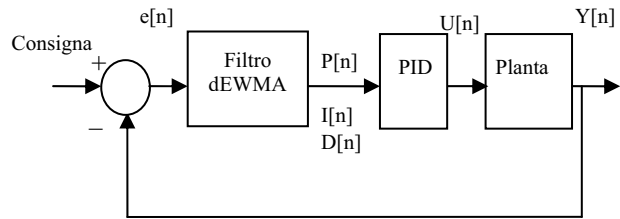


Figura 1: Controlador dEWMA-PID

Donde:  $P[n]$  es la estimación de la señal de error,  $I[n]$  es la estimación de variable integral, y  $D[n]$  es la estimación de la variable derivativa que serán utilizadas para al cálculo de la acción de control.

Para determinar la mejor estimación de la señal  $P[n]$  de error en el instante n, es necesario conocer el valor óptimo de la constante de promediación del filtro durante la evolución del sistema, por lo que se toman mediciones del error  $e[n]$  a intervalos constantes  $T_s$  (que llamaremos *medición instantánea*), y simultáneamente se calcula  $P[n]$  usando la Eq. (5). Es posible saber cuan apartado está el sistema del régimen permanente evaluando la señal de error,

Si:

$$|e[n]| \gg \sigma, \quad (8)$$

La planta se encuentra en estado transitorio y N debe ser pequeño para poder ofrecer una respuesta rápida pero con poco filtrado.

Por otra parte si:

$$|e[n]| \approx \sigma, \quad (9)$$

La planta se encuentra en la banda de error de medición, se podrá filtrar mejor la señal medida (N grande) obteniéndose una estimación con menos ruido (pero lenta). Debe notarse que sólo se cambia la constante de promediación N, mientras que el valor actual de  $P[n]$  se mantiene.

## 2.3. Cálculo de las variables del controlador dEWMA-PID

Se propone una expresión del controlador dEWMA-PID de la forma:

$$U[n] = K_p \cdot P[n] + K_i \cdot I[n] \cdot T_s + K_d \cdot D[n] / T_s, \quad (10)$$

Donde  $P[n]$  es la estimación dEWMA del error  $e[n]$ ,  $I[n]$  la variable integral, y  $D[n]$  la derivativa, calculadas cada intervalo  $T_s$  como se detalla a continuación.

### La variable proporcional $P[n]$ :

Se calcula con la expresión:

$$P[n] = P[n-1] + (e[n] - P[n-1]) / Np, \quad (11)$$

Donde Np se elige según el siguiente algoritmo:

Si:

$$|e[n]| < 3 \cdot \left( \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{Np[n-1]}} \right),$$

Entonces:

$$Np[n] = Np[n-1] \cdot fN$$

Y si:

$$|e[n]| > 3 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sqrt{Np[n-1]}} \right),$$

Entonces:

$$Np[n] = Np[n-1] / fN$$

Donde  $\sigma$  es el desvío estándar del ruido y fN es el factor de adaptación con el cual se incrementa o decrementa Np, este valor, en condiciones de equilibrio, se mantiene alrededor de un valor Np[s] es el valor de equilibrio del filtrado dinámico y es característico de las condiciones de ruido de la planta, este valor se puede conocer de antemano por medición o simulación. En este trabajo se utiliza fN=1,01 tanto en las simulaciones como en el programa en microcontrolador, pero se puede utilizar fN=2 en dispositivos que no posean gran capacidad de cálculo (ya que las multiplicaciones y divisiones se pueden calcular por desplazamiento).

### La variable derivativa D[n]:

Para éste trabajo se propone el cálculo de D[n] como la diferencia de los valores promediados:

$$D[n] = P[n] - P[n-1], \quad (12)$$

Se observa que, con Np cercano a la unidad, esta expresión arroja valores similares a la ecuación (2)

Por otra parte, a medida que Np crece la variable diferencial se calcula con valores cada vez más filtrados.

### La variable Integral I[n]:

En el PID estándar la variable integral i[d] se calcula como acumulación de muestras usando la Eq. (3). Cuando el sistema se encuentra lejos del valor de consigna esta suma puede saturar y producir un efecto denominado Wind-up. La mayoría de los controladores PID incluyen métodos denominados anti Wind-up para evitar este efecto, por ejemplo, se realiza la sumatoria sólo cuando el sistema está cercano al valor de consigna. Si bien esto soluciona el problema antes descrito implica encontrar el rango óptimo dentro del cual integrar, además puede producir variaciones en la acción de control cuando la variable integral comienza a acumular muestras.

Para evitar estos efectos, la variable integral dEWMA I[n] se calcula como:

$$I[n] = I[n-1] + e[n] - I[n-1] / Ni[n] \quad (13)$$

Donde Ni es la constante de promediación para la variable integral. Ni debe ser lo suficientemente grande como para hacer que la Eq. (13) se comporte como una sumatoria. En [1] se puede ver una discusión más completa de cómo se ajusta Ni pero en este trabajo, para facilitar la implementación, se optó por calcularla como:

$$Ni[n] = Np[n]; \quad (14)$$

### En régimen permanente

Suponiendo que el error, en promedio, es igual que un valor  $\xi$  pequeño y distinto de cero, entonces se puede escribir la ecuación (10) de la acción de control para régimen permanente, con Ts=1, como:

$$U[s] = (Kp + Ki \cdot Np) \cdot \xi, \quad (15)$$

### En régimen transitorio

El valor de Np tiende a la unidad (Np(t)=1), se puede escribir la ecuación (10) para el régimen transitorio como:

$$U[t] = (Kp + Ki) \cdot e[n] + Kd \cdot (e[n] - e[n-1]), \quad (16)$$

En régimen transitorio, el término integral, de la misma forma que en el régimen estacionario, actúa como un refuerzo del término proporcional. Sin perder generalidad, se puede adoptar  $Kp = Ki$ . Entonces, realizando los cálculos de esta manera se puede ver a este controlador como un controlador PD con control automático de ganancia, para el término proporcional, variando en el intervalo  $[2Kp, (Np+1)Kp]$

## 2.4 Indicador de Estado

Un problema común cuando se utiliza un control PID para alcanzar un valor de consigna especificado, consiste en saber cuando finaliza la acción de control, ya que dentro de la banda de error de la medición, la variable integral actúa acercándose al valor de consigna, muchas veces oscilando alrededor del mismo.

Como indicador del estado del sistema, no es suficiente entonces, con conocer el valor de la medición instantánea, ni la acción que ejerce el controlador en cada momento.

En la solución propuesta, Np puede utilizarse como indicador del estado del sistema, siendo su evolución representativa del acercamiento a la consigna.

## 3. REALIZACIÓN

El controlador dEWMA-PID se implementó como control de posición en una Plataforma Móvil de Inspección Robotizada (PMIR). Cada motor, uno para Trac-

ción y otro para dirección, es manejado por una placa basada en microcontroladores AVR, y conectada en forma inalámbrica a un dispositivo Master que le envía la posición deseada.

Para esta aplicación es conveniente evitar el sobre-impulso u *Overshoot*. Las características de la plataforma móvil, tales como peso, fricción o ruido, pueden cambiar y cuando esto ocurre, con un control PID estándar es necesario ajustar los valores de  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  para obtener la respuesta óptima.

Como efecto complementario a la acción de reducción de ruido, se espera del dEWMA-PID una mayor adaptabilidad en el ajuste de dichos parámetros cuando se producen variaciones en la condición de carga, y un menor sobre-impulso debido al filtrado cuando el sistema evoluciona hasta entrar en la banda de ruido alrededor la posición deseada.

Se realizaron simulaciones del algoritmo propuesto utilizando la herramienta *Simulink* de *Matlab* y también se tomaron mediciones sobre la placa de control de la plataforma móvil.

Como elemento de comparación se utilizó un PID estándar calculado según (1), en respuesta a un escalón de entrada y se tomaron como referencia tres parámetros dinámicos:

- **Tiempo de crecimiento** (Rise Time), medido como el tiempo en que la señal pasa del 10% al 90% de su valor de consigna.
- **Tiempo de establecimiento** (Settling Time), medido como el tiempo que tarda la señal en alcanzar la banda de error (y permanecer dentro de ella).
- **Sobre-impulso**, como el Valor máximo que sobrepasa la salida al valor de consigna, expresado en %.

y dos parámetros estáticos:

- **Error en el régimen permanente** (Steady State Error), medido como valor RMS.
- **Índice de Fletcher & Powell**: muy utilizado para la evaluación de desempeño (performance) [9] que toma en cuenta el valor cuadrático del error y la señal de control como una medida de la energía empleada y del desgaste del actuador. Se calcula como:

$$J = \sum_{k=0}^M [e_{(k)}^2 + r.u_{(k)}^2]$$

Donde  $r$  es un factor de peso que permite variar la penalización que se hace sobre la acción de control  $u(k)$ . Para los cálculos realizados en el presente trabajo se tomó  $r = 2$ .

### 3.1. Simulación

En la Fig. 2 se observa el diagrama en bloques utilizado en *Simulink*, para contrastar los resultados del PID

estándar y dEWMA-PID, con la misma señal de entrada y afectada por la misma condición de ruido.

Se utilizó el bloque “generador de ruido gaussiano” de *simulink*, con valores de varianza acordes a los considerados para el ajuste del dEWMA-PID.

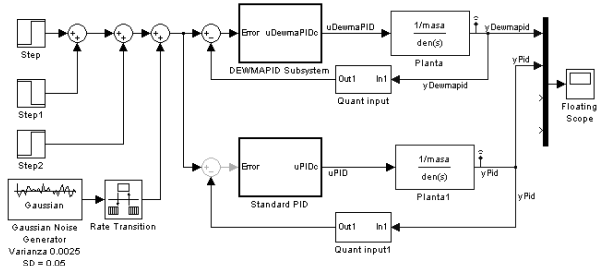


Figura 2: Esquema de conexiones en Simulink

La Tabla 1 muestra resultados obtenidos en una comparación de los dos algoritmos ante un escalón de entrada. Se utilizó el mismo juego de valores  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  en ambos casos.

Tabla 1: Valores del dEWMA-PID y PID estándar

Control	tc	S-I	te	error	J
	[Seg.]	[%]	[Seg.]	[RMS]	
DEWMA-PID	0.067	0.2	0.066	0.1414	$1.3 \cdot 10^7$
PID estándar	0.059	0.4	0.058	0.1415	$1.3 \cdot 10^9$

Se observa que el dEWMA-PID logra resultados similares al PID, con menor sobreimpulso y clara diferencia en el índice de *Fletcher & Powell*, lo que significa menor fluctuación de la acción de control, y por ende menor consumo y desgaste.

En la Fig. 3 se muestra la respuesta en régimen permanente de ambos controladores en presencia de ruido, donde se aprecia que el dEWMA-PID presenta un comportamiento más suave que el del PID estándar.

En la Fig. 4 se observa en detalle el régimen transitorio de la respuesta al escalón de ambos controladores. El controlador dEWMA-PID muestra una respuesta transitoria similar pero con un menor sobreimpulso

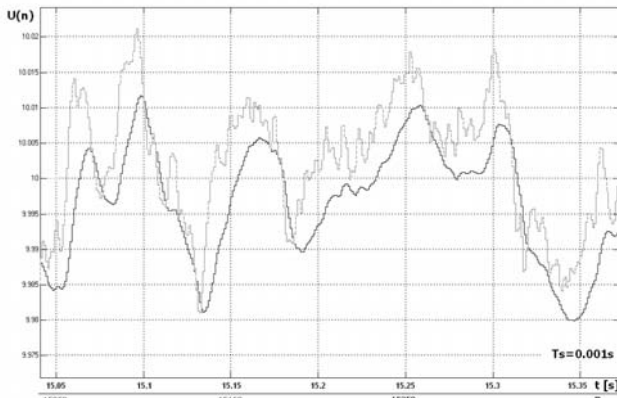


Figura 3: Respuesta en presencia de ruido: en línea plana el dEWMA-PID y en línea punteada el PID estándar

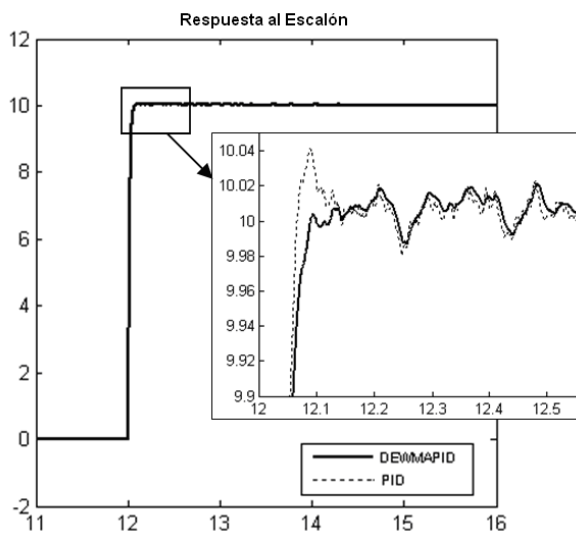


Figura 4: Respuesta al escalón, con detalle del régimen transitorio.

### 3.2. Implementación práctica

El algoritmo propuesto se implementó en un microcontrolador AVR de la línea *Atmel*, ATMEGA16L para controlar un motor de continua con reducción mecánica, realimentando su posición a través de un encoder de cuadratura (Fig. 5). La acción de control se efectúa utilizando la técnica de PWM (Modulación por Ancho de Pulso) con el fin de eliminar alinealidades y zonas “muertas” del motor:

En el mismo microcontrolador, se implementó un algoritmo P.I.D. estándar, con rutina Anti-Wind-Up y el algoritmo propuesto. Para los ensayos, y a efectos de comparación, se presenta un caso testigo donde se utilizaron los mismos juegos de valores para las constantes  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  en cada algoritmo.

En la práctica, estos deberían ser ajustados independientemente a fin de lograr la respuesta óptima en cada

caso. Una investigación sobre el ajuste de estas constantes se elaborará en un trabajo futuro.

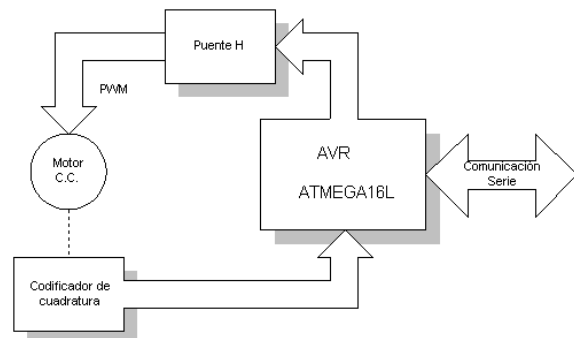


Figura 5: Esquema de la placa de control de motor utilizada para el ensayo de los algoritmos

Los valores de posición y de la acción de control son enviados por la placa de control a través de una comunicación serie a medida que los mismos evolucionan, lo mismo que el valor de  $N$ , representativo del estado del sistema. Se generó el error de medición utilizando una función RANDOM propia del compilador del microcontrolador, con un desvío máximo conocido para poder ajustar en valor de  $\sigma$  en el lazo de control. En la Fig. 6 se observan las salidas de ambos controladores ante la presencia de ruido. Este valor puede variar entre  $-128$  y  $127$ , por lo que se nota que mientras el PID estándar está oscilando fuertemente entre estos extremos, el dEWMA-PID varía más lentamente, dentro de valores menos elevados.

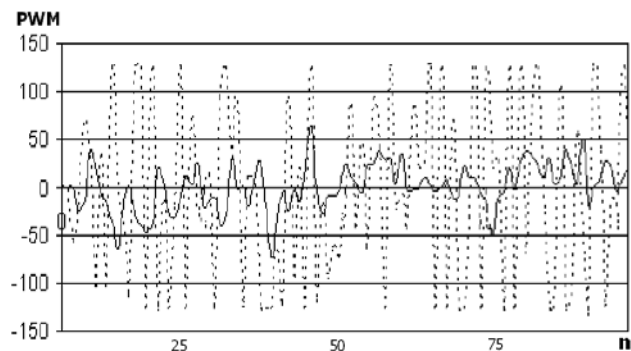


Figura 6: Señal de salida del controlador: dEWMA-PID en línea llena, PID estándar en línea punteada.

El índice de *Fletcher & Powell* para esta condición refleja esta diferencia. Para el PID estándar el cálculo arrojó el valor  $2,69 \cdot 10^6$ , mientras que para el dEWMA-PID tuvo solo  $0,34 \cdot 10^6$ , aproximadamente ocho veces menor.

En la Fig. 7 se observa el comportamiento de ambos controladores en estudio como respuesta a un escalón. En el primer tramo las curvas se superponen ya que, siendo que el valor de consigna está lejos, la salida del controlador es máxima. Luego puede observarse cómo

la curva correspondiente al dEWMA-PID resulta más suave y de menor magnitud.

Para analizar el comportamiento con un escalón de entrada debe tenerse en cuenta el valor del mismo para el cálculo de índice de *Fletcher & Powell*, cuya fórmula queda:

$$J = \sum_{k=0}^M [(e_{(k)} - w_{(k)})^2 + r.u_{(k)}^2]$$

Siendo  $w(k)$  el valor de consigna o *set point*.

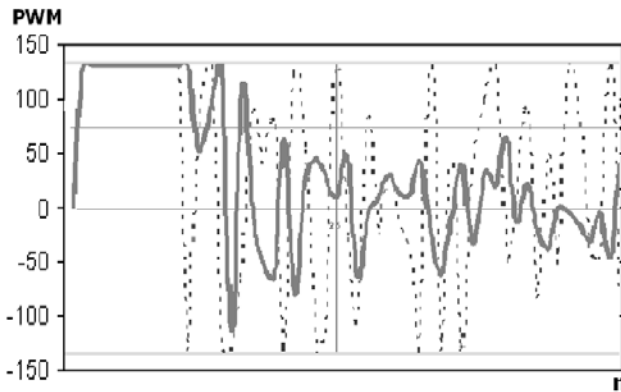


Figura 7: Salida del controlador ante un escalón: dEWMA-PID en línea llena, PID estándar en punteada.

En este caso, resultó para el PID estándar  $J=57 \cdot 10^6$  y para el dEWMA,  $43 \cdot 10^6$ , nuevamente menor.

Los demás parámetros, que fueron objeto de comparación en la simulación, presentaron en ambos algoritmos un comportamiento similar. Se espera en adelante medirlos con suficiente precisión como para determinar más en detalle sus diferencias.

#### Acerca de la Estabilidad

La utilización de fórmulas recursivas dificulta el estudio de la estabilidad con las herramientas clásicas de análisis, pero la inclusión de un filtro pasabajos introduce un polo cuya posición con respecto a las otras singularidades se modifica dinámicamente en función del valor de  $N_p$ , aumentando el margen de estabilidad del sistema. Esto se manifiesta en la disminución del sobreimpulso en el régimen transitorio, mientras que en el permanente aparece una fluctuación de baja frecuencia que se encuentra dentro de la banda de ruido del sensor.

#### 4. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de control cuya estimación de los términos PID se basa en un filtro EWMA cuya constante de promediación ( $N_p$ ) se modifica dinámicamente (dEWMA) y toma un valor pequeño para el régimen transitorio, aumentando a medida que el sistema evoluciona hacia el valor de consigna.

La constante de promediación  $N_p$  puede entonces utilizarse como indicador del estado del sistema.

La acción de control en el régimen permanente resulta más suave, tal como lo refleja un menor índice de *Fletcher & Powell*, debido al aumento de la constante de promediación al acercarse al valor de consigna. De esta manera se logra un menor desgaste de los actuadores junto con un ahorro de energía. Para el caso de su utilización en un robot móvil esto último es de gran importancia.

Como efecto complementario se reduce el sobreimpulso y se evita el uso de una rutina anti-Wind-Up.

Se observó, tanto en las simulaciones como en las mediciones, que estas ventajas no implican una reducción en el desempeño dinámico del sistema.

#### REFERENCIAS

- [1] C.Verrastro, S. Alberino, P. Folino y J.C. Gómez, "Fast self tuning PID controller specially suited for mini robots". *AMIRE Autonomous Minirobots for Research and Edutainment*, Buenos Aires Oct-2007.
- [2] B. Kuchen., R. Carelli. and A Gambier.; "Control Digital", *EBAI*, pp.110-112, 1988.
- [3] R. Fletcher and M.J.D. Powell (1963), "A rapidly convergent descent method for minimization", *Comput. J.*, Vol. 6, pp. 163-168.
- [4] T. Wescott, "PID Without a PhD", *Embedded System Progr.* pp. 86-108. Oct 2000.
- [5] J.G. Proakis, and D.G. Manolakis, "Tratamiento digital de señales", 3ª ed., pp. 92-118, *Prentice Hall, Madrid*, 1998.
- [6] J. W. Crenshaw,.. "All About Filters", *Embedded System Programming* pp 12-20 May 1996.
- [7] S.W. Smith, "The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing", *Technical Publishing California* 1997.
- [8] J.S. Hunter, "Exponentially Wheighted Moving Average", *Journal of Quality Technolog*, Vol. 18 N° 4, October 1986.
- [9] B. Kuchen., R. Carelli. and A Gambier.; "Control Digital", *EBAI*, pp.117-118, pp.192-193, 1988.