

Control de Seguimiento de Caminos para un Bicóptero UAV

Francisco Rossomando, Carlos Soria
Instituto de Automática – CONICET, UNSJ
{csoria, frosoma}@inaut.unsj.edu.ar

Resumen— En este trabajo, se desarrolla un control de seguimiento de caminos sobre la base del modelo cinemático y dinámico de un bicóptero UAV para lograr navegar con precisión en ambientes exteriores en presencia de perturbaciones como el viento. El esquema de control propuesto posee un controlador cinemático vía modo deslizante y un controlador dinámico vía modo deslizante neuronal adaptable. Los resultados de simulación muestran que el controlador diseñado permite seguir al UAV un camino de referencia.

I. INTRODUCCIÓN

Los vehículos aéreos no tripulados (UAV) son plataformas cada vez más populares, debido a su uso en la vigilancia, exploración del medio ambiente, inspección de estructuras, cartografía y fotografía aérea. Los sistemas multirrotores tienen una evidente ventaja sobre las aeronaves de ala fija para diversas aplicaciones debido a su capacidad de aterrizaje y despegue vertical. Poseen además una gran maniobrabilidad y son más fáciles de fabricar. Por estas ventajas, los UAV han despertado un gran interés en la investigación [1,5]. Sin embargo, se caracterizan por un alto nivel de complejidad, alta dimensión del espacio de estados, múltiples entradas y salidas, incertidumbres paramétricas y dinámica no modelada. La inercia varía como resultado de las perturbaciones de viento y el efecto suelo. Entonces, se necesita una ley de control que se adapta a las condiciones cambiantes.

El control de modo deslizante se ha aplicado ampliamente para controlar UAV, por ejemplo los cuatrirrotores. La ventaja de este enfoque es su insensibilidad a los errores del modelo, incertidumbres paramétricas, la capacidad de estabilizar el sistema globalmente y otras perturbaciones [6]. En [7] se utiliza el control de modo deslizante para una clase de sistemas subactuados y utilizó un cuatrirrotor como un ejemplo de aplicación, en [8], los autores presentan un método continuo de control de modo deslizante basado en la linealización por realimentación aplicado a un cuatrirrotor UAV, En [9] presenta un nuevo controlador basado en *backstepping* y técnicas de modo deslizante técnicas para un cuatrirrotor,

En este trabajo se presenta el control de seguimiento de caminos para un bicóptero UAV, si bien en la literatura se encuentran muchos trabajos para los cuatrirrotores, el diseño

para los multirrotores tipos bicópteros UAV aún se encuentran en desarrollo. Se diseñan un controlador cinemático y otro dinámico, ambos mediante la técnica de modo deslizante, y al controlador dinámico se le agrega una red neuronal para compensar las partes no modeladas.

II. MODELADO DEL BICÓPTERO USANDO LA APROXIMACIÓN DE EULER-LAGRANGE

El modelado del bicóptero UAV (Fig. 1) consiste de dos marcos de referencias, el marco de referencia de la tierra $\langle T \rangle$ representado por las variables x, y, z , y el marco de referencia del cuerpo $\langle C \rangle$ representado por las variables x_c, y_c, z_c . Desde ambos marcos de referencias se seguirá el sistema de coordenadas de la mano derecha. El origen del marco del cuerpo está ligado al punto O en el fuselaje. El eje positivo del eje x_c apunta hacia el frente del fuselaje, el eje positivo del eje y_c apunta hacia el motor izquierdo (motor 1) y el eje positivo del eje z_c está apuntando en la dirección hacia arriba. El sentido positivo de las tres variables angulares, rolado (ϕ), cabeceo (θ) y orientación (ψ) se decide por la rotación de la mano derecha alrededor de los ejes positivos x, y, z respectivamente.

Por tanto, las coordenadas generalizadas para la representación del modelo del bicóptero son $q=[x, y, z, \phi, \theta, \psi]^T$, donde (x, y, z) representa la posición del centro de masa y (ϕ, θ, ψ) representa la orientación del bicóptero en el marco de la tierra $\langle T \rangle$.

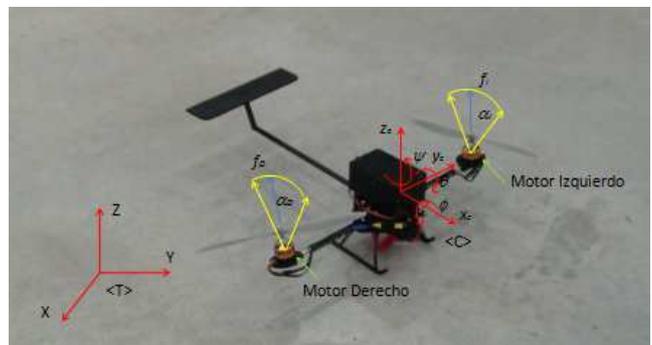


Fig. 1: Prototipo de bicóptero construido y su sistema de coordenadas.

A. Matriz de rotación para la transformación del marco (C) al marco (T)

La relación entre cualquier vector v_c en el marco <C> con un correspondiente vector v_T en marco <T> está dada por:

$$v_T = R v_c \quad (1)$$

donde R es la matriz de rotación del marco <C> con respecto al marco <T>, la cual se puede expresar como

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - s\psi s\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

$c\theta$ y $s\theta$ son formas abreviadas de $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ respectivamente.

B. Fuerzas y torques actuantes en el cuerpo

Las fuerzas que actúan en el bicóptero incluye la fuerza hacia adelante a lo largo del eje positivo x_c , dada por

$$F_{x_c} = f_D \sin(\alpha_D) + f_I \sin(\alpha_I) \quad (3)$$

y la fuerza vertical actuando a lo largo del eje positivo de z_c , dada por

$$F_{z_c} = f_D \cos(\alpha_D) + f_I \cos(\alpha_I) \quad (4)$$

donde f_D , f_I son fuerzas ejercidas por los motores derechos e izquierdos respectivamente, y α_D y α_I son los respectivos ángulos de cabeceo con la dirección positiva en x_c . La fuerza de traslación en la dirección y_c es igual a cero. Por lo tanto el vector de fuerza total en el marco <C> está dado como

$$F_c = [F_{x_c}, 0, F_{z_c}]^T \quad (5)$$

Los torques aplicados el cuerpo, expresados en el marco generalizado, los cambios de ϕ , θ , ψ son mediante τ_ϕ , τ_θ , τ_ψ respectivamente, y se expresa mediante

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f_I \cos(\alpha_I) - f_D \cos(\alpha_D))l \\ (f_I \sin(\alpha_I) + f_D \sin(\alpha_D))h \\ (f_I \sin(\alpha_I) + f_D \sin(\alpha_D))l \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde l es la distancia de cada motor al centro del bicóptero y h es la distancia vertical al centro de gravedad desde el punto O .

Usando Euler-Lagrange [10], la relación entre las fuerzas en el marco <C> dada en (5) y las fuerzas en el marco <T> está dada como

$$F_T = R F_c = \begin{bmatrix} (c\psi c\theta) F_{x_c} + (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) F_{z_c} \\ (s\psi c\theta) F_{x_c} + (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) F_{z_c} \\ -s\theta F_{x_c} + (c\theta c\phi) F_{z_c} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Entonces la ecuación del movimiento de traslación es

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = F_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (8)$$

La cual expandiéndola toma la forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (c\psi c\theta) F_{x_c} + (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) F_{z_c} \\ m\ddot{y} &= (s\psi c\theta) F_{x_c} + (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) F_{z_c} \\ m\ddot{z} &= -s\theta F_{x_c} + (c\theta c\phi) F_{z_c} - mg \end{aligned} \quad (9)$$

Las ecuaciones del movimiento rotacional se pueden obtener de la forma

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta} = \Gamma \quad (10)$$

Donde $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$, $M(\Theta)$ es la matriz de inercia, $C(\Theta, \dot{\Theta})$ es la matriz compuesta de las fuerzas centrífugas y giroscópicas asociadas con ϕ, θ, ψ , [11] y Γ está dado en (6).

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR CINEMÁTICO

A. Modelo del bicóptero en un plano a altura constante

Si al vehículo aéreo se lo mantiene a altura contante, con cabeceo y rolo en cero, es decir $z = z_d = cte$, $\phi = \phi_d = 0$, $\theta = \theta_d = 0$, se podrá realizar la navegación en un plano. En ese plano, la posición y orientación del vehículo, están caracterizados por el vector $q = (x, y, \psi)$ donde x y y son las coordenadas del centro de masa y ψ es el ángulo de orientación del vehículo, esto es, el ángulo entre el eje x y el eje principal del vehículo.

El movimiento del vehículo está descrito mediante las siguientes ecuaciones:

Modelo cinemático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos(\psi) \\ \dot{y} &= v \sin(\psi) \\ \dot{\psi} &= \omega \end{aligned} \quad (11)$$

Modelo dinámico

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{F_{x_c}}{m} \\ \dot{\omega} &= \frac{\tau_\psi}{I_z} \end{aligned} \quad (12)$$

Donde v es la velocidad de desplazamiento y ω es la velocidad angular. La ecuación (11) corresponde a un sistema con restricciones cinemáticas no holonómicas porque involucra las derivadas de las coordenadas del vehículo y estas son no integrables. Son válidas para un vehículo que se mueve en un plano suponiendo que no hay deslizamiento.

B. Modelo cinemático de seguimiento de caminos

Siguiendo el esquema de la Fig. 2, los errores de posición del vehículo respecto a un camino son $(\tilde{y}, \tilde{\psi}) = (y_d - y, \psi_d - \psi)$. Las ecuaciones se deducen de la siguiente manera:

dinámica desconocida la cual es variante en el tiempo, donde δ_{Max} , es la cota superior.

$$\delta_{Max} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\delta(t)|, \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (v(t) \quad \omega(t))^T, \\ \mathbf{u}(t) &= (u_v(t) \quad u_\omega(t))^T, \\ \delta(t) &= (\delta_v(t) \quad \delta_\omega(t))^T, \\ g_v &= \frac{1}{m}; g_\omega = \frac{1}{I_z} \end{aligned} \quad (27)$$

son el vector de estados de salida, el vector de entrada, el vector de incertidumbres dinámicas y los parámetros del modelo. El error de seguimiento es definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t) \\ &= \left(v(t) - v_{ref}(t), \omega(t) - \omega_{ref}(t) \right)^T. \end{aligned} \quad (28)$$

B. Control de Modo Deslizante

El objetivo es el diseño de un controlador neuronal adaptable el cual garantice la convergencia de todas las variables para el sistema de lazo cerrado durante el seguimiento para una señal de referencia acotada \mathbf{x}_{ref} .

El método de linealización por realimentación neuronal el cual está basado en un modelo RBF NN puede resolver esta clase de problema de control [12].

El propósito de la ley de control obtenida por técnica de modo deslizante es el seguimiento de una trayectoria del sistema no lineal a una superficie especificada previamente (definida por el diseñador) en el espacio de estados y manteniéndola en esta superficie por el tiempo subsecuente, [12], [13], [14].

Una superficie deslizante para un sistema MIMO puede ser definida en función del error de estados $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ de (28).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_v \right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{d}{dt} + \lambda_\omega \right) \end{pmatrix} \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau = \\ &= \begin{pmatrix} e_v(t) + \lambda_v \int_0^t e_v(\tau) d\tau \\ e_\omega(t) + \lambda_\omega \int_0^t e_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

La derivada de la superficie deslizante $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ es:

$$\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_v(t) + \lambda_v \int_0^t e_v(\tau) d\tau \\ e_\omega(t) + \lambda_\omega \int_0^t e_\omega(\tau) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e}_v(t) + \lambda_v e_v(t) \\ \dot{e}_\omega(t) + \lambda_\omega e_\omega(t) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

donde λ_i es una constante estrictamente positiva. Donde el problema de control equivalente es la construcción de la acción de control $\mathbf{u}(t)$ tal que:

$-\mathbf{S}(\mathbf{x})$ es alcanzado en un tiempo finito t_s
 $-\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0$; para todo $t > t_s$

La solución para el problema de control equivalente es la selección de una acción de control que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S_i^2) \leq -\eta_i |S_i|; \forall t \geq 0, \eta_i > 0 \quad i=1,2, \quad (31)$$

donde S_i es una fila de la matriz \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) &\leq -\eta_{max} \|\mathbf{S}\| \quad \forall t \geq 0, \eta_{max} > 0, \\ \eta_{max} &= \max(\eta_v, \eta_\omega), \end{aligned} \quad (32)$$

En el diseño del sistema de control en modo deslizante, primero, se obtiene la ley de control ideal equivalente \mathbf{u}^* , la cual determina la dinámica del sistema sobre la superficie deslizante. La ley de control ideal equivalente es obtenida de

$$\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \Big|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \quad (33)$$

sustituyendo (30) en (33), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\mathbf{e}}(t) + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) = \\ &= \left(\mathbf{g} \mathbf{u}^*(t) + \delta(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right) + \dots \\ &\quad + \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (34)$$

Ahora, considerando el sistema no lineal con incertidumbres (25) tratado en [12], definiendo la ley de control \mathbf{u}^* que garantice la condición de deslizamiento de (32), está compuesta por un control $\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}^{-1} \left[-\text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \delta(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right]$ y un término con una discontinuidad $\mathbf{u}_S = -\eta \text{sgn}(\mathbf{S})$ definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= \mathbf{g}(t)^{-1} \left[-\text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \dots \right. \\ &\quad \left. - \delta(t) - \eta \text{sgn}(\mathbf{S}) + \dot{\mathbf{x}}_{ref}(t) \right], \end{aligned} \quad (35)$$

donde

$$\text{sgn}(S_i) = \begin{cases} 1 & \text{for } S_i > 0 \\ 0 & \text{for } S_i = 0. \\ -1 & \text{for } S_i < 0 \end{cases} \quad (36)$$

Se propone la función candidata de Lyapunov como:

$$V = \sum_{i=v}^{\omega} \frac{1}{2} (S_i^2), \quad (37)$$

Diferenciando (37) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=v}^{\omega} S_i \dot{S}_i = \sum_{i=v}^{\omega} S_i (\dot{e}_i(t) + \lambda_i e_i(t)) = \dots \\ &= \sum_{i=v}^{\omega} S_i (\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i,ref}(t) + \lambda_i e_i(t)) = \dots \\ &= \sum_{i=v}^{\omega} S_i (g_i u_i(t) + \delta_i(t) - x_{i,ref}(t) + \lambda_i e_i(t)), \end{aligned} \quad (38)$$

reemplazando (35) en (38).

$$\dot{V} = \sum_{i=v}^{\omega} S_i \dot{S}_i = \sum_{i=v}^{\omega} S_i (-\eta_i \text{sgn}(S_i)) \leq -\sum_{i=v}^{\omega} \eta_i |S_i|. \quad (39)$$

entonces, dividiendo cada termino en (39) por $|S_i|$ e integrando ambos lados sobre el intervalo $0 \leq t \leq t_s$, donde t_s es el tiempo requerido para alcanzar S , se obtiene

$$\int_0^{t_s} \left(\frac{S_i}{|S_i|} \dot{S}_i \right) dt \leq - \int_0^{t_s} \eta_i dt \Rightarrow |S_i(t_s)| - |S_i(0)| \leq -\eta_i t_s. \quad (40)$$

de esta forma, destacando que $S_i(t_s)=0$, tiene

$$t_s \leq \frac{|S_i(0)|}{\eta_i}. \quad (41)$$

y consecuentemente, el tiempo finito de convergencia a la superficie deslizante S .

C. Ley de ajuste del sistema neuronal

En los sistemas reales, \mathbf{g} , $\delta(t)$ y $\boldsymbol{\eta}$ son desconocidos y la función $\text{sgn}(S)$ no es continua. Entonces es imposible de generar la ley de control (35). Para sobre poner estas dificultades, se utiliza un sistema neuronal para $\hat{\delta}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*)$ y $\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_g^*)$ para aproximar respectivamente, $\delta(t)$, \mathbf{g} y el termino de estabilización ($\boldsymbol{\eta} \text{sgn}(S)$). La función gaussiana es usada como la función de activación de cada neurona en la capa oculta (42).

$$\hat{\xi}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{c}}_i, \hat{\zeta}_i) = \exp\left(-\hat{\zeta}_i^2 (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_i)^T (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_i)\right), \quad (42)$$

donde i es la $i^{\text{ésima}}$ neurona de la capa oculta, \mathbf{c}_i es la posición central de la $i^{\text{ésima}}$ neurona, y ζ_i es el factor de apertura de la función Gaussiana.

La estructura de RBF-NN es mostrada en la Fig. 3.

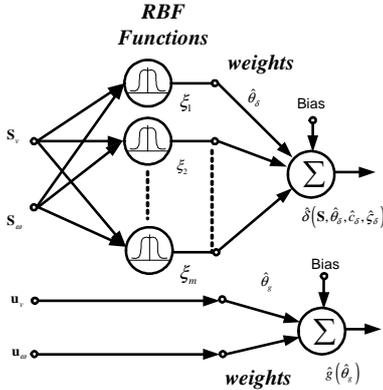


Fig. 3. Red de Funciones de Base Radial

Considerando las aproximaciones, la ley de control se escribirá como \mathbf{u} , que puede ser aproximada por una red RBF-NN a través de entrenamiento en línea,

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{g}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_g^{T*}) \left[-\text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \dots \dots - \hat{\delta}^*(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} + \mathbf{u}_s \right], \quad (43)$$

donde $\boldsymbol{\theta}_\delta(m \times j)$ and $\boldsymbol{\xi}^*(m \times l)$ son los vectores de parámetros de pesos óptimos $\boldsymbol{\theta}_f$ y las funciones de base $\boldsymbol{\xi}$,

respectivamente; \mathbf{c}^* y $\boldsymbol{\zeta}^*$ son los vectores de parámetros óptimos de los centros \mathbf{c} y factores de apertura $\boldsymbol{\zeta}$, respectivamente; y \mathbf{u}_s es el término de estabilización. Sin embargo, los vectores de parámetros óptimos son desconocidos, por lo tanto es necesario estimar sus valores. Definiendo una función de estimación.

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{g}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_g^{T*}) \left[-\text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) - \dots \dots - \hat{\delta}^*(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} + \mathbf{u}_s \right], \quad (44)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta$ es un vector de parámetros estimados $\boldsymbol{\theta}_\delta$ y $\hat{\mathbf{c}}$ y $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ son vectores de parámetros estimados de \mathbf{c} y $\boldsymbol{\zeta}$, respectivamente del vector función $\hat{\xi}$.

Donde $\boldsymbol{\theta}_g$ y $\boldsymbol{\theta}_\delta$ son pesos neuronales y ganancias del sistema de aproximación adaptable. $\hat{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_g)$, $\hat{\delta}(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta)$ respectivamente, y pueden ser expresadas por:

$$\hat{\delta}(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \dots = \left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{\delta_i}^T \exp\left(-\hat{\zeta}_{\delta_i}^2 (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_{\delta_i})^T (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_{\delta_i})\right) \\ \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_{\omega_i}^T \exp\left(-\hat{\zeta}_{\omega_i}^2 (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_{\omega_i})^T (\mathbf{S} - \hat{\mathbf{c}}_{\omega_i})\right) \end{array} \right), \quad (45)$$

y

$$\hat{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_g) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_g^T, \quad (46)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ ($m=5$) y $\hat{\boldsymbol{\theta}}_g^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

La ley de control global está dada por la ecuación (43), y definiendo el mínimo error de aproximación como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_g^*)] \mathbf{u} + \delta(t) - \hat{\delta}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*). \quad (47)$$

Ahora, usando (30) y considerando la dinámica del modelo de UAV (25) puede ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{S}} = \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{ref} = \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) + \mathbf{g} \mathbf{u}(t) + \delta(t) - \dot{\mathbf{x}}_{ref} \quad (48)$$

Reemplazando la acción de control propuesta en (43) en (47)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} &= \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) + \left(\delta(t) - \hat{\delta}(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) \right) + \dots \\ &+ \left(\mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_g) \right) \mathbf{u}(t) - \text{diag}(\lambda_v, \lambda_\omega) \mathbf{e}(t) + \dot{\mathbf{x}}_{ref} + \dots \\ &+ \mathbf{u}_s - \dot{\mathbf{x}}_{ref} = \dots \\ &= \hat{\delta}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) - \hat{\delta}(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) + \dots \\ &+ \left(\hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_g^*) - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_g) \right) \mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}_s \end{aligned} \quad (49)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} & \hat{\delta}(\mathbf{S}, \boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) - \hat{\delta}(\mathbf{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) = \dots \\ & \boldsymbol{\theta}_\delta^{*T} \boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{x}) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T)(\hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) = \dots \\ & = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \\ & \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}_\delta^*) - \hat{\mathbf{g}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta) = \boldsymbol{\theta}_\delta^{*T} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T = (\boldsymbol{\theta}_\delta^{*T} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T) \end{aligned} \quad (50)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta$ y $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{S})$ son definidas como:

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta - \boldsymbol{\theta}_\delta^* \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta - \boldsymbol{\theta}_\delta^* \\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{S}) = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{S}) - \boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{S}) \end{cases} \quad (51)$$

Š puede ser aproximada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} = & (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})) + \dots \\ & + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}_s. \end{aligned} \quad (52)$$

Usando una aproximación para la función $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta = \boldsymbol{\xi}_\delta^*(\mathbf{S}, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) - \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta)$. Para tratar con $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta$, la expansión en serie de Taylor de $\boldsymbol{\xi}_\delta^*$ esta tomado sobre $\mathbf{c}_\delta^* = \hat{\mathbf{c}}_\delta$ y $\boldsymbol{\zeta}_\delta^* = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_\delta^*(\mathbf{S}, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*) = & \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) + \boldsymbol{\Xi}_\delta^T \tilde{\mathbf{c}}_\delta + \dots \\ & + \boldsymbol{\Phi}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta + \boldsymbol{\rho}_\delta(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{c}}_\delta, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta), \end{aligned} \quad (53)$$

Donde $\boldsymbol{\rho}$ indica los argumentos de orden elevado en una expansión de la serie de Taylor, y $\boldsymbol{\Xi}$ y $\boldsymbol{\Phi}$ son derivadas de $\boldsymbol{\xi}_\delta^*(\mathbf{S}, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*)$ con respecto a \mathbf{c}_δ^* y $\boldsymbol{\zeta}_\delta^*$ en el punto $(\hat{\mathbf{c}}_\delta, \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta)$. Estos son expresados como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Xi}_\delta^T = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_\delta^*(\mathbf{S}, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*)}{\partial \mathbf{c}_\delta^*} \right|_{\substack{\mathbf{c}_\delta^* = \hat{\mathbf{c}}_\delta \\ \boldsymbol{\zeta}_\delta^* = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta}} \\ \boldsymbol{\Phi}_\delta^T = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_\delta^*(\mathbf{S}, \mathbf{c}_\delta^*, \boldsymbol{\zeta}_\delta^*)}{\partial \boldsymbol{\zeta}_\delta^*} \right|_{\substack{\mathbf{c}_\delta^* = \hat{\mathbf{c}}_\delta \\ \boldsymbol{\zeta}_\delta^* = \hat{\boldsymbol{\zeta}}_\delta}} \end{cases}, \quad (54)$$

$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta(\mathbf{S})$ puede ser expresado como

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta = \boldsymbol{\Xi}_\delta^T \tilde{\mathbf{c}}_\delta + \boldsymbol{\Phi}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta + \boldsymbol{\rho}_\delta(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{c}}_\delta, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta). \quad (55)$$

De (54) el término de orden elevado $\boldsymbol{\rho}$ está acotado por:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\rho}_\delta(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{c}}_\delta, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta)\| &= \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta - \boldsymbol{\Xi}_\delta^T \tilde{\mathbf{c}}_\delta - \boldsymbol{\Phi}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta\| \\ &\leq \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta\| + \|\boldsymbol{\Xi}_\delta^T \tilde{\mathbf{c}}_\delta\| + \|\boldsymbol{\Phi}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta\| \\ &\leq \kappa_1 + \kappa_2 \|\tilde{\mathbf{c}}_\delta\| + \kappa_3 \|\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta\|, \end{aligned} \quad (56)$$

donde κ_1 , κ_2 , y κ_3 son algunas constantes de cota, debido al hecho de que las redes RBF y sus derivadas están siempre acotadas por valores constantes.

Reemplazando (54) en (51)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} = & (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \boldsymbol{\Xi}_\delta^T \tilde{\mathbf{c}}_\delta + \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \boldsymbol{\Phi}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta + \boldsymbol{\Delta}) + \dots \\ & + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{u}_s. \end{aligned} \quad (57)$$

Consideración 1: Donde la incertidumbre $\boldsymbol{\Delta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \boldsymbol{\rho}_\delta(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{c}}_\delta, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_\delta) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\delta^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_\delta(\mathbf{S})$ se considera acotada por $\|\boldsymbol{\Delta}\| \leq \Delta_{Max}$

Teorema Considerando el sistema no linear con incertidumbres (25) y considerando (39)-(41). Entonces el controlador definido por (44) y (56) asegura la convergencia en un tiempo finito del error de seguimiento hacia la zona acotada y su convergencia exponencial a hacia la región acotada Λ_i

Prueba: Creando una función candidata definida positiva de Lyapunov, puede ser definida como:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\omega} [S_{\Lambda_i}^2 + \gamma_1^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}) + \gamma_2^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g i}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g i})] + \dots \right. \\ & \left. + \gamma_4^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}_f^T \tilde{\mathbf{c}}_f) + \gamma_5^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_f^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_f) \right), \end{aligned} \quad (58)$$

Donde S_{Λ_i} es una medida de la distancia del estado actual con respecto a la zona acotada, y puede ser calculada como sigue:

$$\begin{aligned} S_{\Lambda_i} = & S_i - \Lambda_i \text{sat} \left(\frac{S_i}{\Lambda_i} \right) \\ \text{sat} \left(\frac{S_i}{\Lambda_i} \right) = & \begin{cases} \text{sign}(S_i) & \text{if } |S_i| \geq \Lambda_i \\ (S_i / \Lambda_i) & \text{if } |S_i| < \Lambda_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (59)$$

La presencia de un término discontinuo en la ley de control conduce al efecto bien conocido del “chattering”. Con el fin de evitar estas oscilaciones de alta frecuencia, las cuales son no deseadas en la variable controlada, la función de signo puede ser sustituida por una función de saturación, similar al realizado por [15]. Esta sustitución suaviza la discontinuidad de control e introduce una delgada capa acotada S_{Λ} sobre las proximidades de la superficie de deslizamiento.

$$S_{\Lambda_i} = \left\{ e_i \in \mathbb{R} \mid S_i(e_i) \leq \Lambda_i \right\}, \quad (60)$$

donde Λ_i es una constante estrictamente positive que representa el espesor de la zona acotada.

Diferenciando (59) con respecto al tiempo y considerando que $S_{\Lambda_i} = 0$ dentro de la zona acotada y $\dot{S}_{\Lambda_i} = \dot{S}_i$. Obteniendo $\dot{V} = 0$, dentro S_{Λ_i} y fuera es

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{\omega} [S_{\Lambda_i} \dot{S}_i + \dots \\ & + \gamma_1^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\delta i}) + \gamma_2^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g i}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{g i})] + \dots \\ & + \gamma_3^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_f) + \gamma_4^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_f^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}_f), \end{aligned} \quad (61)$$

Substituyendo (58) en \dot{V} y considerando $u_{S_i} = -(\varepsilon_{Max} + \Delta_{Max}) \text{sign}(S_{\Lambda_i}) = -\eta \text{sign}(S_{\Lambda_i})$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \sum_{i=1}^{\omega} [S_{\Lambda_i} \left((\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}_i(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \boldsymbol{\Xi}_{\delta i}^T \tilde{\mathbf{c}}_{\delta i} + \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \boldsymbol{\Phi}_{\delta i}^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_{\delta i} + \boldsymbol{\Delta}_i) + \dots \right. \\ & \left. + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g i}^T \mathbf{u} + \varepsilon_i - \eta \text{sign}(S_{\Lambda_i}) \right) + \dots \\ & + \gamma_1^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\delta i}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\delta i}) + \gamma_2^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{g i}^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{g i})] + \dots \\ & + \gamma_3^{-1} (\tilde{\mathbf{c}}_f^T \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_f) + \gamma_4^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_f^T \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}_f), \end{aligned} \quad (62)$$

reacomodando,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \sum_{i=v}^{\omega} \left[S_{\Lambda_i} \tilde{\theta}_{\delta i}^T \hat{\xi}(\mathbf{S}) + S_{\Lambda_i} \hat{\theta}_{\delta i}^T \Xi \tilde{\mathbf{c}}_{\delta} + S_{\Lambda_i} \hat{\theta}_{\delta i}^T \Phi \tilde{\mathbf{c}}_{\delta} + \dots \right. \\ & + S_{\Lambda_i} \Delta_i + S_{\Lambda_i} \tilde{\theta}_{g i}^T \mathbf{u} + S_{\Lambda_i} \varepsilon_i - \eta |S_{\Lambda_i}| + \dots \\ & \left. + \gamma_1^{-1} \left(\tilde{\theta}_{\delta i}^T \dot{\hat{\theta}}_{\delta i} \right) + \gamma_2^{-1} \left(\tilde{\theta}_{g i}^T \dot{\hat{\theta}}_{g i} \right) \right] + \dots \\ & + \gamma_3^{-1} \left(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta}^T \tilde{\mathbf{c}}_{\delta} \right) + \gamma_4^{-1} \left(\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta}^T \tilde{\mathbf{c}}_{\delta} \right), \end{aligned} \quad (63)$$

y.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \sum_{i=v}^{\omega} \left[\gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_{\delta}^T \left(\gamma_1 S_{\Lambda_i} \hat{\xi}(\mathbf{x}) + \dot{\hat{\theta}}_{\delta i} \right) + \dots \right. \\ & \left. + \gamma_2^{-1} \tilde{\theta}_{g i}^T \left(\gamma_2 S_{\Lambda_i} \mathbf{u} + \dot{\hat{\theta}}_{g i} \right) + \dots \right. \\ & \left. + \left(S_{\Lambda_i} (\varepsilon_i + \Delta_i) - \eta |S_{\Lambda_i}| \right) + \dots \right. \\ & \left. + \gamma_3^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{\delta}^T \left(\gamma_3 \Xi \hat{\theta}_{\delta i} S_{\Lambda_i} + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} \right) + \dots \right. \\ & \left. + \gamma_4^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{\delta}^T \left(\gamma_4 \Phi \hat{\theta}_{\delta i} S_{\Lambda_i} + \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} \right) \right], \end{aligned} \quad (64)$$

haciendo, $\dot{\hat{\theta}}_{g i} = \dot{\theta}_{g i}$, $\dot{\hat{\theta}}_{\delta i} = \dot{\theta}_{\delta i}$ and $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} = \dot{\mathbf{c}}_{\delta}$, $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} = \dot{\mathbf{c}}_{\delta}$ la ley de adaptación de parámetros debería ser elegida como

$$\dot{\hat{\theta}}_{\delta i} = -\gamma_1 S_{\Lambda_i} \hat{\xi}(\mathbf{S}), \quad (65)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_{g i} = -\gamma_2 S_{\Lambda_i} \mathbf{u}, \quad (66)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} = -\gamma_3 \Xi \sum_{i=v}^{\omega} \left(\hat{\theta}_{\delta i} S_{\Lambda_i} \right), \quad (67)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{\delta} = -\gamma_4 \Phi \sum_{i=v}^{\omega} \left(\hat{\theta}_{\delta i} S_{\Lambda_i} \right), \quad (68)$$

Para hacer $\dot{V}_2 < 0$ substituyendo (65), (66), (67) y (68) en (61)

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=v}^{\omega} \left[-\eta |S_{\Lambda_i}| + \left(\varepsilon_i + \Delta_i \right) S_{\Lambda_i} \right] \leq 0, \quad (69)$$

Lo cual implica $V_2(t) \leq V_2(0)$ y que S_{Λ_i} es acotado. De la definición de \mathbf{u}_s , puede ser fácilmente verificado que \mathbf{S} está acotada. Considerando (26), puede ser verificado que \mathbf{e} es también acotado. Sin embargo (27) implica que \mathbf{S} es también acotado.

Este resultado produce un mejor control del bicoptero UAV ya que las velocidades de error del controlador dinámico tiende a cero y los errores de posición del controlador de la cinemática también tiende a cero.

V. RESULTADOS DE SIMULACIONES

Se desea recorrer el camino en un ambiente exterior marcado a través de puntos de paso como se muestra en la Fig. 4. Los valores del controlador cinemático son: $\lambda=3$, $K=4$, $W_{yMax}=1\text{m/s}$. En la Fig. 5 se muestra la trayectoria seguida por el Bicoptero y en la Fig. 6 la acción de control. Se puede apreciar que en la fig. 5 la trayectoria seguida por el Bicoptero UAV mapea perfectamente a la referencia con un mínimo error. La figura 6. muestra la acción de control con un mínimo

efecto ‘chattering’ el cual ha sido reducido por el ajuste de los parámetros de ambos controladores.



Fig. 4: Ejemplo de camino para recorrer un cultivo.

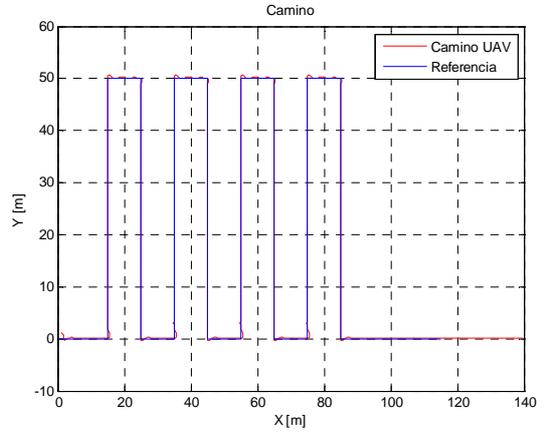


Fig. 5: Camino recorrido por el UAV

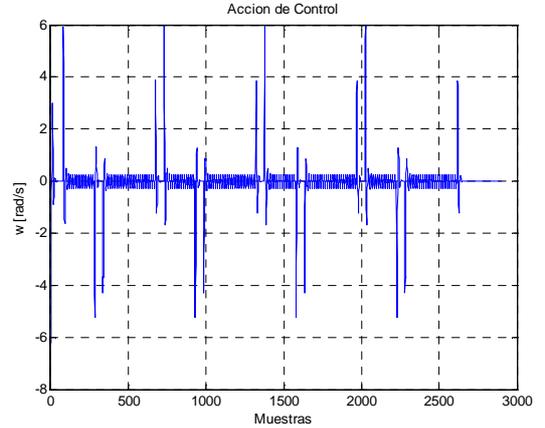


Fig. 6: Acción de control.

VI. CONCLUSIONES

El control de modo deslizante mejora la estabilidad del sistema global contra perturbaciones, como el viento y mantiene el desempeño del sistema de control. Mientras el control dinámico compensa los posibles errores de modelo que pueden afectar al sistema, el cual no requiere un conocimiento previo del mismo. Además podría aplicarse en modelos

dinámicos con parámetros variantes en el tiempo (variación de masa o inercia). Con este diseño se obtiene robustez en el sentido de que el mecanismo de ajuste automático puede ajustar al controlador neural mediante el uso de un algoritmo de aprendizaje, y la estabilidad asintótica global del controlador se establece a través del criterio de estabilidad de Lyapunov.

REFERENCIAS

- [1] Puri, A. "A Survey of Unmanned Aerial Vehicles (UAV) for Traffic Surveillance." Technical Report, Tampa, 2005.
- [2] Saggiani, G. M., and Teodorani."Rotary wing UAV potential applications: an analytical study through a matrix method", Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol. 76 Iss: 1, pp.6 – 14, 2004.
- [3] Huang, M., Xian, B., Diao, C., Yang, K. and Feng Y., "Adaptive Tracking Control Of Under-actuated Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles Via Backstepping", In Proc. American Control Conference, Baltimore, USA, 2010., pp. 2076.
- [4] Fang, Z. and Gao, W. 2011, "Adaptive integral backstepping control of a Micro-Quadrotor", IEEE, pp. 910.
- [5] Fregene, K., Braatz, R. D. (Eds.), "Unmanned aerial vehicle [special issue]," Control Systems, IEEE , vol. 32, no. 5, oct. 2012.
- [6] Utkin, V. I. (1992). "Sliding modes in control and optimization." New York:Spinger.
- [7] Rong Xu, Ümit Özgüner "Sliding mode control of a class of underactuated systems" Automatica 44 (2008) 233 – 241
- [8] Zhou Fang, Zhang Zhi, Liang Jun, Wang Jian "Feedback Linearization and Continuous Sliding Mode Control for a Quadrotor UAV" Proceedings of the 27th Chinese Control Conference July 16-18, 2008, Kunming, Yunnan, China
- [9] Samir Bouabdallah and Roland Siegwart "Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor" Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation Barcelona, Spain, April 2005.
- [10] Bhanja Chowdhury A., A. Kulhare and G. Raina. A Generalized Control Method for a Tilt-rotor UAV Stabilization. *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation, Control and Intelligent Systems*. Bangkok, Thailand, 2012.
- [11] Murray R. M., Z. Li, S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, 1994.
- [12] Slotine, J -J E, and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1990.
- [13] Edwards, Spurgeon, S.K.: *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis, U.K, 1998.
- [14] Utkin, V.I.: *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag ISBN 978-0387535166, 1992.
- [15] Hung, L.C., Chung, H.Y.: Decoupled control using neural network-based sliding-mode controller for nonlinear systems. *Expert Syst. Appl. Elsevier* **32**, 1168–1182, 2007.