GUÍA COMPLEMENTARIA DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA – CURSO DE VERANO-

EJERCICIOS DE RECTA Y PLANO

1) Sean las rectas $L_1: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-ky=4 \end{cases}$, $L_2: \dfrac{x-1}{2} = y+2 = z$

a) Halle $k \in R$, si existe, tal que L_1 sea paralela al vector $\vec{v} = (1,1,0)$.

b) Para $k=-1$, determine si L_1 y L_2 son coplanares o alabeadas, y halle la ecuación del plano que las contiene y/o la distancia entre ellas, según corresponda.

Rta.: a) No existe k **b)** Son alabeadas, $\text{dist}(L_1, L_2) = \dfrac{11}{\sqrt{35}}$

---

2) Calcule la distancia de la recta $L_1: (x, y, z) = (2,1,0) + \lambda\,(1,1,1)$ al plano π que contiene al eje " z" y que es paralelo a la recta L_1. Grafique el plano.

Rta.: $x-y=0$; $\text{dist}(L_1, \pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

---

3) Dadas la recta $r: (x,y,z) = (1+t\ ,\ kt\ ,\ 2-t)$, $t \in \Re$, y los puntos $A(-3,1,2)$, $B(1,2,1)$

a) Halle $k \in \Re$, si existe, tal que B pertenezca a la recta r.

b) Para k = 2, halle la ecuación paramétrica del plano que pasa por A y contiene a la recta r.

Rta.: a) No existe k **b)** $\begin{cases} x = -3 + 4t_1 + t_2 \\ y = 1 - t_1 + 2t_2 \\ z = 2 - t_2 \end{cases}$ $;t_1 \in R \wedge t_2 \in R$

---

4) Sean las rectas : $L_1: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1 \\ z = -\lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$ $L_2: x+2 = -y = -(z-1)$

a) Determine si son alabeadas.

b) Calcule la distancia entre ellas o su intersección, según corresponda

Rta.: a) Son alabeadas **b)** $\text{dist}(L_1, L_2) = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

---

5) Sean las rectas : $r_1: x+1 = y+2 = \dfrac{z}{3}$; $r_2: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$

Obtenga las ecuaciones de todos los planos π que cumplen con las siguientes condiciones:

$\pi \perp r_1$ y $\text{distancia}(\pi, r_2) = \sqrt{11}$

Rta.: $\pi_1: x+y+3z+1=0$; $\pi_2: x+y+3z-21=0$

---

6) Sean: $r: \begin{cases} -x+y-1=0 \\ x+tz+h=0 \end{cases}$ y $\pi: x+y+z+1=0$

Determine los valores de t y $h \in \Re$ para los cuales $r \subset \pi$

Rta.: $t = \dfrac{1}{2} \wedge h = 1$

---

7) Sean: la recta $r: (x,y,z) = (1+\lambda\ ,-1-2\lambda\ ,\ 2+k\lambda)$, $\lambda \in R$

y el plano $\pi:(x,y,z)=(\alpha+\beta\ ,1-\beta\ ,2+\alpha)\quad ,\alpha\in R\wedge\beta\in R$

a) Halle el valor de “k” para que la recta “r” sea paralela al plano π.

b) Para el valor de “k” hallado, calcule la distancia entre la recta y el plano.

Rta.: a) k = -1 **b)** $\text{dist}(r,\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

---

8) Dadas las rectas: $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=y-2=z$; $L_2:\begin{cases} x=1-2\beta \\ y=3+\beta \quad \beta\in R \\ z=1+\beta \end{cases}$

a) Demuestre que se cortan en un único punto, y calcule las coordenadas de dicho punto.

b) Halle la proyección del punto A(1,1,0) sobre el plano que determinan las rectas L_1 y L_2.

Rta.: a) I(-1,4,2) **b)** $\pi: y-z-2=0$; $A'\left(1,\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

---

9) Sea la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-kz=0 \end{cases}$

a) Halle todos los $k\in R$ tales que la distancia de la recta al origen de coordenadas sea d = 1

b) Grafique ambos planos y la recta intersección cuando k = 1

Rta.: a) k = -1 **b)** $r:(x,y,z)=(t\ ,1-2t,t)\quad ,t\in R$

---

10) Sean los planos: $\pi_1: x+y-2z-k=0$; $\pi_2: x+y=1$.

a) Halle $k\in R$, si existe, tal que la recta que determinan ambos planos esté incluida en el plano coordenado $z=0$

b) Para k = 2 , grafique ambos planos utilizando sus trazas, y la recta intersección entre ambos planos.

Rta.: a) k = 1 **b)** $r:(x,y,z)=\left(t\ ,1-t,-\dfrac{1}{2}\right)\quad ,t\in R$

---

11) Dado el plano $\pi:\ (x;y;z)=(1;0;5)+t_1(1;1;-1)+t_2(1;0;1)$ y el haz de planos $\alpha_i:\ (y-z)+k(x-z-1)=0$, halle un plano perteneciente al haz que sea perpendicular a π.

Rta: $x+2y-3z-1=0$

---

12) Sean $L_1:\begin{cases} 2x-4y+z+1=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$ y $L_2:\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y+2}{4}=z$

a) Halle “a” para que L_1 y L_2 sean coplanares.

b) Encuentre todos los puntos P pertenecientes al eje “y” tal que la distancia al plano que contiene a L_1 y L_2 sea igual a $\sqrt{41}$

Rta: a) a = 2 b**)** P_1(0 ; -23 ; 0) P_2(0 ; 18 ; 0)

---

13) Dada la recta $L:\begin{cases} y=2x \\ z=1 \end{cases}$ y el plano $\alpha: x+y+z=9$

a) Halle la ecuación del plano β , que contiene a la recta L y es perpendicular al plano α.

b) Halle la proyección de la recta L sobre el plano α.

Rta: a) $\beta\ :2x-y-z+1=0$ **b)** $L':\ (x,y,z)=\left(\dfrac{8}{3},\lambda,\dfrac{19}{3}-\lambda\right),\ \lambda\in R$

---

14) Halle los valores de las constantes “a” y “b”, tal que la proyección de la recta

$$r\ :\begin{cases} x=-2t \\ y=1+at\ ;\ t\in R \\ z=bt \end{cases}$$ sobre el plano $\pi : x+2z=30$ resulte un solo punto. Encuentre dicho punto.

Rta: $a=0 \wedge b=-4 \qquad P(6;1;12)$

---

15) Determine la ecuación de la recta que contiene al origen, es perpendicular a la recta $r\ :\ x=y-5 \ \wedge\ z=2y-3$ y corta a la recta $s\ :\ y=2x+1 \ \wedge\ z=x+2$

Rta: $(x,y,z)=(t,t,-t)\ ;\ t\in R$

---

16) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por A(3, 6, 4), corta al eje z y es paralela al plano $\pi\ :\ x-3y+5z-6=0$. Calcule la distancia de la recta al plano.

Rta: $r\ :(x,y,z)=(3+t,6+2t,4+t)\quad t\in R \qquad \text{dist}(r,\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{35}}$

---

17) Halle la ecuación del plano que contiene a la recta $s:\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ y forma un ángulo de 30° con la recta $r\ :\ (x;y;z)=(-1;0;1)t\quad ;t\in R$, grafique la recta s y los planos. ¿Cuál es la posición relativa de s y r?. Justifique

Rta: $\alpha_1\ :x-y-1=0 \qquad \alpha_2\ :\ x+y-5=0$ Alabeadas

---

18) Dada la recta $L\ :\ x-2=y-1=\dfrac{-z-3}{2}$

a) Halle la proyección de L sobre el plano $\pi\ :\ x+y+z=0$

b) Halle la ecuación del plano que contiene a L y a su proyección.

Rta: a) Es la recta L , ya que la recta L está contenida en el plano π.

b) $(a+2b)x+(-a)y+bz+(-a-b)=0$, es un haz de planos que se construye con dos planos cualesquiera que contengan a la recta L.

---

19) Halle el punto contenido en la recta $r:\begin{cases} x=1-t \\ y=3+t \\ z=2+2t \end{cases}$ cuya proyección sobre el plano "yz" es (0 ; 1 ; -2).

Rta: (3 ; 1 ; -2)

---

20) Halle todos los puntos P del plano "xy" tal que la distancia al plano $\alpha\ :\ 3y+4z-12=0$ es igual a 1. ¿Qué lugar geométrico representa el conjunto de todos los puntos P?. Grafique.

Rta: $\begin{cases} y=\dfrac{17}{3} \\ z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{7}{3} \\ z=0 \end{cases}$ dos rectas paralelas al eje *x*.

EJERCICIOS DE ESPACIO VECTORIAL

21) Justifique si la siguiente afirmación es V o F (Si es verdadera debe demostrarlo y si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

Sea el espacio vectorial (V;+;R;.)

Si $A=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\subset V$ es l. indep. entonces $B=\{\vec{u}-2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v},\ k\vec{w}-\vec{u}+\vec{v}\}$ es l. indep.

Rta.: Falso, si k = 4, B no es linealmente independiente.

---

22) Dado el conjunto $S=\{(x;y;z)\in R^3/(x;y;z)\times(1;-1;2)=(0;0;0)\}$

a) Dé la interpretación geométrica de **S**.

b) Analice si S es un subespacio de R^3 y en caso afirmativo halle una base y su dimensión.

Rta: a) Es una recta que contiene al origen y es paralela al vector (1 ; -1 ; 2) **b)** S es un subespacio de dimensión uno donde { (1 ; -1 ; 2) } es una base.

Nota: x: producto vectorial o cruz

---

23) Sean S y W subespacios vectoriales de $\left(R^3, +, R, \cdot\right)$

$$S = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y + z = 0\} \quad ; \quad W = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = \lambda(a,b,1),\ \lambda \in R\}$$

a) Obtenga, si existen, $a, b \in R / W \subset S$. Interprete geométricamente.

b) Verifique si para a = b = 1 , $S \oplus W$ es suma directa, justifique su respuesta.

Rta.: a) $\forall a \in R \wedge b = a + 1$. La recta W esta incluida en el plano S. **b)** Para éste caso no se verifica la condición anterior por lo tanto la recta no está incluida en el plano, la intersección es el origen y la suma es directa.

---

24) Dado el conjunto $B = \{\, kx^2 + k \ ;\ x^2 - kx \ ;\ x^2 + kx + 1 \,\} \subset P_2$

a) Halle todos los valores reales de k para que B sea una base de P_2.

b) Para $k = 1$ halle las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base B.

Rta.: a) k ∈ R - { 0 } **b)** $x^2{}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $x_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $1_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

---

25) Dado el conjunto $A = \{\ x^2 + kx - 1 \ ;\ 2x^2 - 2x \ ;\ 1\} \subset P_2$.

a) Halle k∈ R / A resulte linealmente dependiente.

b) Para el valor de k del ítem anterior, halle el espacio generado por A, una base y su dimensión.

Rta: a) k = -1 **b)** E(A) = { $p \in P_2 / p(x) = ax^2 - ax + b$}, B={ $x^2 - x$; 1} , dimE(A) = 2

---

26) Sea $S = gen\{(0,k,1)\,(1,-1,0)\,(2,1,2)\}$ obtenga $k \in R /$ dim S = 2, y extienda una base de S a una base de R^3, con una base de $S^\perp$.

Rta.: $k = \dfrac{3}{2}$; $B = \{(1,-1,0);(2,1,2);(2,2,-3)\}$

---

27) Dados los conjuntos:

$B = \{(-1,0,1)\,(2,-1,0)\}$, base de $S \subset R^3$ y $W = \{(x,y,z) \in R^3 / x + y - z = 0\}$

a) Demuestre que W es un subespacio de R^3, halle una base y su dimensión.

b) Halle S+W ¿La suma S+W es directa? Justifique.

Rta.: a) $B_W = \{(1,-1,0);(0,1,1)\}$; $\dim W = 2$ **b)** $S + W = R^3$ la suma no es directa ya que $S \cap W = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (-3,2,-1)t \wedge t \in R\}$

---

28) Sean los subespacios: W_1 = gen { (-1,1,0) ; (0,-2,1) ; (-1,3,-1) } y W_2 = gen { (2,a,1) }

a) Halle "a" para que la suma $W_1 + W_2 = R^3$

b) Para a = -4, encuentre el $W_1 \cap W_2$, una base y su dimensión. Interprete geométricamente y grafique ambos subespacios.

Rta.: a) $a \neq -4$ **b)** Si $a = -4 : W_2 \subset W_1 \therefore W_1 \cap W_2 = W_2$; $B_{W_2} = \{(2,-4,1)\}$ dimW_2 = 1

W_1 es un plano y W_2 una recta.

29) Sea el conjunto $B=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ c \end{pmatrix};\begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ c+1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3a \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix};\right\}$ una base de R^{3x1}. Encuentre los valores de "a", "b" y "c" para que las coordenadas del vector $\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sean $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para los valores hallados, verifique que B es base de R^{3x1}.

Rta.: $a=1 \wedge b=2 \wedge c=-1$

---

30) Sean los subespacios de P_2 :

$S = gen\{ x + x^2 \ ; \ -1 + x \}$ y $W = \{ p(x) = a + bx + cx^2 \ / \ a = 0 \wedge b = c \}$

a) Halle $S + W$, $S \cap W$, bases y dimensión de cada operación. Indique, justificando la respuesta si la suma es directa.

Rta.: $W \subset S \therefore S+W=S$; $B_S=\{x+x^2;-1+x\};\dim S=2$

$S \cap W = W$; $B_W=\{x+x^2\}$; $\dim W=1$. La suma no es directa.

---

31) Sea S subespacio vectorial de $(R^4,+,R,\cdot)$ tal que:

$S=\{(x,y,z,u)\in R^4 \,/\, 3x-2y=0 \wedge y+z+u=0\}$. Obtenga una base y la dimensión de S y de $S^{\perp}$

Rta.: $B_S=\{(2,3,-3,0);(0,0,1,-1)\}$; $\dim S=2$; $B_{S^{\perp}}=\{(3,-2,0,0);(0,1,1,1)\}$; $\dim S^{\perp}=2$

---

32) Sea $B_1=\{v_1;v_2;v_3\}$ y $B_2=\{v_1+2v_2+v_3;v_2+v_3;-v_2+v_3\}$ bases de R^3, proporcione todos los $w\in R^3$ que tienen las mismas coordenadas en B_1 y B_2

Rta.: $[w]_{Bi}=\begin{bmatrix} h \\ -h \\ 2h \end{bmatrix}$ para $i=1 \vee i=2$ o también $w=h(v_1-v_2+2v_3)\ \forall h\in R$

EJERCICIOS DE MATRICES Y DETERMINANTES

33) Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine el valor de "a", si existe, para que la dimensión del espacio columna sea igual a 2. Justifique su respuesta

b) Para a = 1, defina mediante ecuaciones el espacio generado por las columnas de la matriz A.

Rta.: a) a = 1, rango(A) = dim(Ec(A)) = 2 **b)** $Ec(A)=\{(x,y,z)\in R^3 \,/\, x-2y+z=0\}$

---

34) Analice la validez de la siguiente proposición. Demuestre en caso de ser verdadera, o proporcione un contraejemplo en caso de ser falsa:

a) Si $k\in R-\{0\}$ y $A\in R^{pxq}$ es una matriz inversible entonces $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$

b) Si $A\in R^{nxn}$ y $B\in R^{nxn}$ son matrices inversibles entonces $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Rta.: a) Verdadero, demuestre que: $(kA)(k^{-1}A^{-1})=(k^{-1}A^{-1})(kA)=I$

b) Falso Si : $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$

---

35) Obtenga todas las matrices: $P\in \mathbf{R}^{2\times 2}$ / $P^{-1}.A.P=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Sugerencia: Premultiplique la ecuación por la matriz P

Rta: $P = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{5}{2}a & -b \end{pmatrix} \wedge\ a \in R - \{0\} \ \wedge\ b \in R - \{0\}$

---

36) Dado el conjunto: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset R^{2\times 2}$

a) Halle una base y la dimensión del espacio generado por A.

b) Halle $k \in R \ / \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in \text{gen}(A)$

Rta: a) $\overline{A} = \text{gen}(A) = \left\{ X \in R^{2\times 2} / X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a-3b & 2a+b \end{pmatrix} \wedge a, b \in R \right\}$

$B_{\overline{A}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim(\overline{A}) = 2$ **b)** k = -2

---

37) Dado $S = \left\{ X \in R^{2\times 2} \ / \ XA = AX \wedge A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, halle:

a) Una matriz genérica $X \in S$, una base y la dimensión de S

b) La relación que deben cumplir los coeficientes de la matriz genérica X para que sea singular.

Rta: a) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge a, b \in R$ son todas las matrices que conmutan con A.

$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; dim S = 2 **b)** $|a| = |b|$

---

38) Dado el conjunto $S = \{ A \in R^{3\times 3} / A$ es antisimétrica y $A^2 = N_{3\times 3} \}$

a) ¿ Es (S ; + ; R ; **.**) un subespacio de ($R^{3\times 3}$; + ; R ; **.**) ?

b) Si **a)** es afirmativo: halle una base y la dimensión de S

Rta: a) Si, $S = \{ N^{3\times 3} \}$ espacio nulo **b)** No existe base, dim S = 0

---

39) Probar que si las matrices A y B son idempotentes, permutables y del mismo orden, entonces $A.B$ es idempotente

Rta: $\forall A \in R^{p\times p}\ \forall B \in R^{p\times p} : A^2 = A \wedge B^2 = B \wedge AB = BA \Rightarrow (AB)^2 = AB$

Dem

$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2 B^2 = AB$

---

40) Sea A una matriz cuadrada de orden n e idempotente y $B = 2A - I$, demuestre que B es involutiva.

Rta: $\forall\ A \in R^{n\times n} : A^2 = A \wedge B = 2A - I \ \Rightarrow B^2 = I$

a) Dem

$B^2 = BB = (2A - I)(2A - I) = (2A)(2A) + (2A)(-I) + (-I)(2A) + (-I)(-I) =$

$=(2.2)(AA) + [2.(-1)](AI) + [(-1)2](IA) + [(-1)(-1)](I.I) =$

$4A^2 + (-2)A + (-2)A + 1.I = 4A + [-2 + (-2)]A + I = 4A + (-4)A + I = [4 + (-4)]A + I = 0A + I = N + I = I$

---

41) Dado $S = \{ A \in R^{3\times 3} / A$ es simétrica $\wedge Tr(A) = 0 \wedge a_{12} = a_{13} \}$

a) Pruebe que (**S** ; + : R ; **.**) es un subespacio de ($R^{3\times 3}$; + ; R ; .)

b) Halle una base y la dimensión de S.

Rta: a) Sugerencia: La demostración la puede realizar con el elemento genérico del espacio $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & d \\ b & d & -(a+c) \end{pmatrix}$ o utilizando el sistema de 3 ecuaciones $\begin{cases} A = A^T \\ Tr(A) = 0 \\ a_{12} = a_{13} \end{cases}$

b) $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim S = 4$

---

42) Dados $S = \{ A \in R^{2\times 2} \;/\; |A| = 0 \wedge Tr(A) = 0 \}$ y $W = \{ B \in R^{2\times 2} \;/\; B = -B^T \}$

a) Es **S** un subespacio de $R^{2\times 2}$?. En caso afirmativo dar una base y la dimensión.

b) Es W un subespacio de $R^{2\times 2}$?. En caso afirmativo dar una base y la dimensión.

c) Es S I W un subespacio de $R^{2\times 2}$?. En caso afirmativo dar una base y la dimensión.

Rta: a) No, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \notin S$ la suma no es ley de composición interna en S**.**

b) Si, sugerencia $W = \left\{ B \in R^{2\times 2} / B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \right\}$ una base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; dim W = 1

c) Si, es el espacio nulo: **S** I W $= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; no posee base; dim S I W = 0

---

43) Dado el subespacio $S = \{A \in R^{3\times 3}$ / A es triang. sup. y $a_{k1}+a_{k2}+a_{k3}=0$ para k = 1; 2; 3 $\}$

Determine una base y la dimensión de **S**. ¿Existe A∈ **S** tal que A sea inversible?. Justifique.

Rta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; dim**S** = 3 ; No, rg(A) < 3

---

44) Justifique si cada una de las siguientes afirmaciones son V o F (si es verdadera, debe demostrarlo, si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

a) Sean $A, B \in R^{nxn} / |B| \neq 0 \Rightarrow |B^{-1}AB^T| = |A|$

b) Sea $A \in R^{nxn} / A^T A = I \Rightarrow |A| = 1$

c) Sean $A, B, I \in R^{3x3} / |A| = 1 \wedge B = 2I \Rightarrow |A^2B^{-1} + A^2B| = \frac{125}{8}$

Rta.: a) V **b)** F **c)** V

---

45) Sea $A = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) \in R^{4\times 4}$ donde A_j indica la columna j de A y sea $B = (-A_3 \quad 2A_4 + A_2 \quad A_1 \quad 5A_4)$. Calcule: $\det\left(\left(A^T \right)^2 . 2\, B^{-1} \right)$ sabiendo que $\det(A) = a \neq 0$

Rta: $\frac{16}{5} a$

---

46) Dada $A = (A^1 \quad A^2 \quad A^3) \in R^{3\times 3}$ con $|A| = 3$. Calcule:

a) $\left| \frac{1}{3} A^T . B \right|$ siendo $B = (A^1 - 2A^2 \quad A^1 \quad \frac{1}{3} A^3)$

b) $\left| \left(A^T \right)^{-1} . \frac{1}{2} M^T \right|$ siendo $M = \left(-A^2 \quad 2A^2 + A^1 \quad 3A^3 \right)$

c) Justifique porque la matriz $E = B.M$ es inversible

d) ¿ Las columnas de E son linealmente independientes o dependientes? Justifique.

Rta: a) $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** Como $|B| = 2 \neq 0 \ \wedge \ |M| = 9 \neq 0$, entonces ambas matrices tienen rango tres y por lo tanto son inversibles y también es inversible su producto $E^{-1} = (B.M)^{-1} = M^{-1}.B^{-1}$. **d)** Como $|E| = 18 \neq 0$ entonces el rango de la matriz es tres, igual al rango columna, por lo tanto las columnas de E son linealmente independientes.

---

47) Sea P una matriz antisimétrica de orden “n” impar. ¿Cuánto vale el determinante de P? Justifique.
Nota: P es antisimétrica $\Leftrightarrow P = -P^T$

Rta.: $|P| = 0$ Sugerencia: Aplique la función determinante a la ecuación: $P = -P^T$ y propiedades.

---

48) Siendo $A_{n \times n} = (a_{ij}) \in R^{n \times n} / a_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ Halle $B = \left\{ x \in Z / |A_{4\times4}| = |A_{3\times3}| \right\}$

Rta: $|A_{4\times4}| = (x+3).(x-1)^3 \quad ; \quad |A_{3\times3}| = (x+2).(x-1)^2 \quad ; \quad B = \{ 1 \}$

---

49) Dada la matriz $A_n = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n} / a_{ij} = \begin{cases} x^i & \text{si } j = 1 \\ j^i & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$ Halle $B = \{ x \in R / \ A_3 \text{ sea singular} \}$

Rta: $|A_3| = 6x(x-2).(x-3) \qquad B = \{ 0 ; 2 ; 3 \}$

---

50) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x-2 & 0 & x+2 \\ x-2 & x-3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Indique para que valores de $x \in R$ la matriz A es singular.

b) Para los valores de x obtenidos en **a)**, encuentre el espacio columna de A, dé una base y su dimensión.

c) Para $x = 0$, calcule $\left| \left(A^{-1} \right)^2 . \ 2 B^T \right|$ siendo $B = \left(A^2 - 2A^1 \quad A^3 \quad -A^2 \right)$

Rta.: a) $x = -2 \qquad |A| = (x+2).(x^2 - 3x + 4)$

b) $Ec(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 / -10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ Una base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$; dim Ec (A) = 2

c) $|A| = 8 \Rightarrow |B| = -16 \Rightarrow \left| \left(A^{-1} \right)^2 . B^T \right| = -2$

PARCIALES Y RECUPERATORIOS PARTE A

10-2-2010 PARCIAL A CURSO DE VERANO

1) Dados los planos: $\pi_1 : x - y = 0 \; ; \; \pi_2 : y + z + 1 = 0$

Halle la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a los planos anteriores y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 1. Grafique las soluciones

---

2) Dadas las rectas $r_1 : x = y = z + 4$ y $r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = a \end{cases}$

a) Qué valores debe tomar la constante "a" para que las rectas sean coplanares, encuentre el plano que las contiene.

b) Para a = 0, calcule la distancia entre las rectas.

---

3) Sean S y W subespacios vectoriales de $(R^3, +, R, \cdot)$

$S = \{(x, y, z) \in R^3 / x + a\,y + z = 0\}$; $W = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = \lambda(1, 0, b), \lambda \in R\}$

a) Encuentre una base ortonormal de S.

b) Halle los valores de de a y b tal que:

i) El complemento ortogonal de S sea igual a W, dé una interpretación geométrica.

ii) La suma S+W sea directa, dé una interpretación geométrica.

---

4) Dado el siguiente subespacio vectorial de $(R^{2x2}, +, R, \cdot)$

$S = \{A \in R^{2x2} / A = A^T\}$

a) Encuentre una base y la dimensión de S.

b) Halle las coordenadas de I (I matriz identidad) en la base obtenida en el ítem anterior.

c) Sea el subespacio $W = \left\{ A \in R^{2x2} / A = A^T \wedge AB = BA \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S$

Encuentre un elemento genérico del W .

---

5) Sean A = (A_1 A_2 A_3) $\in R^{3x3}$ / Det(A) = k $\neq 0$ y
B = ($A_1 - 3\,A_2$, $\alpha.A_2 + 2\,A_3$, $- A_1$) .
Verifique que B es inversible para cualquier $\alpha \in R$ y obtenga Det (B^{-1}) en función de k.

RESOLUCIÓN FECHA 10-2-2010:

1)

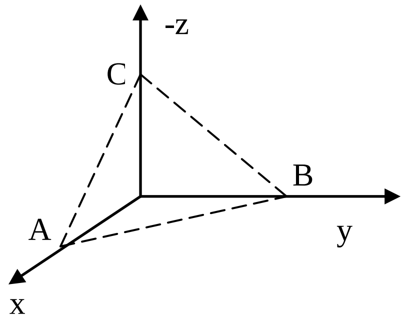
Hallar: $\alpha / \alpha \perp \pi_1 \wedge \alpha \perp \pi_2 \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1$

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_2} \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_{\pi_1} \, x \, \vec{n}_{\pi_2} \wedge \frac{|d|}{\sqrt{3}} = 1$$

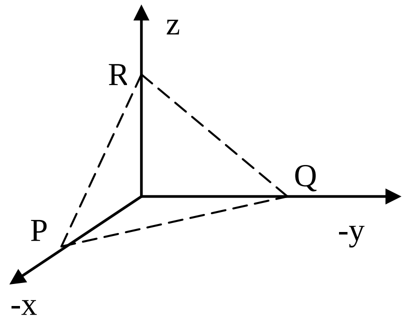
$$\vec{n}_\alpha = (-1, -1, 1) \wedge \left(d = \sqrt{3} \vee d = -\sqrt{3}\right)$$

$$\boxed{\alpha_1 : \; -x - y + z + \sqrt{3} = 0 \qquad \alpha_2 : \; -x - y + z - \sqrt{3} = 0}$$

$A(\sqrt{3}, 0, 0)$; $B(0, \sqrt{3}, 0)$; $C(0, 0, -\sqrt{3})$ $\qquad$ $P(-\sqrt{3}, 0, 0)$; $Q(0, -\sqrt{3}, 0)$; $R(0, 0, \sqrt{3})$



5^{to} octante



3^{er} octante

2) a)

$$r_1:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-4+t \end{cases} \qquad A(0,0,-4)\in r_1 \ \wedge \vec{u}_1=(1,1,1)//\, r_1$$

$$r_2:\begin{cases} x=2 \\ y=a \\ z=\lambda \end{cases} \qquad B(2,a,0)\in r_2 \ \wedge \vec{u}_2=(0,0,1)//\, r_2$$

r_1 y r_2 son coplanares $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\vec{u}_1 x \vec{u}_2\right)=0$ $\boxed{a=2}$

Hallar $\pi / r_1 \subset \pi \wedge r_2 \subset \pi$

$\forall (x,y,z)\in\pi:\ \overrightarrow{AP}\left(\vec{u}_1 x \vec{u}_2\right)=0$

$\boxed{x-y=0}$

b) Si $a=0$ las rectas son alabeadas

$$dist(r_1,r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\left(\vec{u}_1 x \vec{u}_2\right)\right|}{\left|\vec{u}_1 x \vec{u}_2\right|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \qquad \boxed{dist(r_1,r_2)=\sqrt{2}}$$

3) a) Para cualquier valor real de "a" la dimensión del espacio es dos y el lugar geométrico es un plano. Existen infinitas bases ortonormales de S, cualquier par de vectores ortogonales normalizados que sean vectores posición de puntos del plano S, por ejemplo:

$\vec{u}=(1,0,-1)\wedge \vec{v}/\vec{v}\perp\vec{u}\ \wedge \vec{v}\in S\Rightarrow \vec{v}\perp\vec{u}\wedge\vec{v}\perp\vec{n}\ \left(\vec{n}\ \text{un normal de S}\right)$

Una solución : $\vec{v}=\vec{u}\,x\,\vec{n}=(a,-2,a)$

$$\boxed{B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{a}{\sqrt{2a^2+4}},\frac{-2}{\sqrt{2a^2+4}},\frac{a}{\sqrt{2a^2+4}}\right)\right\}}$$

b)

i) $\forall (x,y,z)\in S:\langle (x,y,z),(1,a,1)\rangle=0\Rightarrow (1,a,1)\in S^{\perp}$

$S^{\perp}=W\Rightarrow \exists t\in R/\ (1,a,1)=t(1,0,b)$

$\frac{1}{1}=\frac{1}{b}\wedge a=0$ $\boxed{a=0\wedge b=1}$

S plano perpendicular a (1,a,1) y W es una recta perpendicular al plano S en el origen.

$S+W$ es directa $\Leftrightarrow S\cap W=\{(0,0,0)\}$

ii) $$S\cap W:\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=b\lambda \\ \lambda+b\lambda=0 \end{cases} \qquad \text{comp. det.}\Rightarrow (1+b)\lambda=0\wedge 1+b\neq 0$$

$a\in R\wedge b\neq -1$, la recta no debe estar contenida en el plano.

4) a) Existen infinitas bases, por ej.: $\boxed{B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}\quad \dim S=3}$

b) $\boxed{[I]_B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}$ **c)** $\boxed{A=\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}\wedge a,b\in R}$

5) $\text{Det}(B)=6k\wedge k\neq 0\therefore B$ es inversible $\boxed{\text{Det}(B^{-1})=\dfrac{1}{6k}}$

01-03-10 1er REC. PARCIAL A CURSO DE VERANO

1) Dados: $\pi:\ x+ay-z+4=0$ y $L:\ (x,y,z)=(1,0,b)+(2,1,1)t\ ;\forall t\in R$

Encuentre el valor de las constantes "a" y "b" de tal forma que:

a) La recta se encuentre a una distancia igual a $\sqrt{3}$ unidades del plano.

b) La recta esté contenida en el plano.

2) Dados los planos: $\pi_1: 3x+2y+z-6=0$ y $\pi_2:\ x+2z-4=0$

a) Halle la recta intersección de los planos y grafique los planos y la recta.

b) Encuentre el plano que contiene a la recta anterior y es perpendicular al plano $\alpha: x=5$

3) Los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$ y $\vec{v}=(-2,a,-2)$ pertenecen al mismo subespacio S de R^3 y

$$T=\{(x,y,z)\in R^3 / x-z=0\}.$$

Halle, si existe, el valor de la constante "a" de tal forma que:

a) $\dim(S^{\perp})=2$. Obtenga una base de $S^{\perp}$

b) $S+T=R^3$.

4) Dado el conjunto:

$$A=\{1+x\ ;\ -1+x^2\ ;\ x+x^2\}\subset P_2$$

Indique V o F, justifique su respuesta:

a) A es una base de P_2

b) $p(x)=-3-x+2x^2\in \text{gen}(A)$

5) Sean A, B dos matrices de R^{nxn}. Analice la validez de las siguientes proposiciones, justifique la respuesta:

a) Si $A\,.\,B-A^2=I$ entonces A es inversible

b) Si $A^2=N$ entonces $A=N$ (N es la matriz nula de R^{nxn})

RESOLUCIÓN FECHA 01-03-10

1) a)

$\pi:\ x+ay-z+4=0$ y $L:\ (x,y,z)=(1,0,b)+(2,1,1)t$

$L//\pi\wedge \text{dist}(L,\pi)=\sqrt{3}\Leftrightarrow \vec{u}_L\perp\vec{n}_\pi\wedge \text{dist}(A,\pi)=\sqrt{3},\ \forall A\in L$

$$\text{Datos: } \vec{u}_L = (2,1,1)\ ;\ \vec{n}_\pi = (1,a,-1)\ ;\ A(1,0,b)$$

$$(2,1,1)(1,a,-1)=0 \wedge \frac{|1+a*0-b+4|}{\|\vec{n}_\pi\|} = \sqrt{3} \Rightarrow a=-1 \wedge \frac{|-b+5|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{a=-1 \wedge (b=2 \vee b=8)}$$

b)

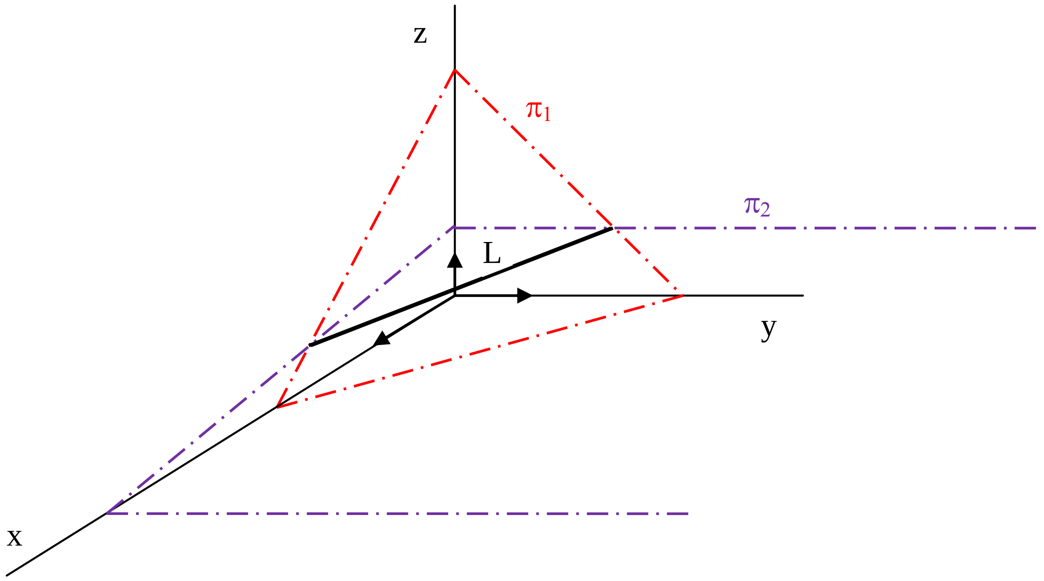
$$L \subset \pi \Leftrightarrow \forall P : P \in L \Rightarrow P \in \pi$$
$$P(1+2t, t, b+t)$$
$$1+2t+at-(b+t)+4=0$$
$$(a+1)t = -5+b \Rightarrow a+1=0 \wedge -5+b=0$$

$$\boxed{a=-1 \wedge b=5}$$

También se puede resolver:
Del ítem a)
$L \subset \pi \Leftrightarrow L // \pi \wedge \text{dist}(L,\pi)=0$
$a=-1 \wedge b=5$

2) a)

$$L = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 3x+2y+z-6=0 \\ x+2z-4=0 \end{cases} \qquad \boxed{L: \begin{cases} x=4-4t \\ y=-3+5t \\ z=2t \end{cases}}$$



b)

$$\text{ec. del haz: } (3a+b)x+(2a)y+(a+2b)z+(-6a-4b)=0$$

$$\pi_3 \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi 3} \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{n}_{\pi 3}.\vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (3a+b; 2a; a+2b)(1;0;0)=0 \Rightarrow 3a+b=0$$

Una solución no trivial: $a=1 \wedge b=-3$

$$\boxed{\pi_3 : 2y-5z+6=0}$$

$\dim(S^\perp)=2 \Rightarrow \dim(S)=1$ $\qquad (\dim(S)+\dim(S^\perp)=\dim(R^3))$

$\exists k \in R / \vec{v} = k\vec{u} \Rightarrow \exists k=-2 / (-2,a,-2) = k(1,0,1) \wedge a=0$ $\qquad \boxed{a=0}$

$S^\perp = \{(x,y,z) \in R / x+z=0\}$ $\qquad \boxed{B_{S^\perp} = \{(1,0,-1);(0,1,0)\}}$

b)

Como $\vec{u} = (1,0,1) \in T \wedge \vec{v} = (-2,a,-2) \in T \Rightarrow gen(\vec{u};\vec{v}) \subset T \;\; \forall a \in R \Rightarrow S+T=T$

$$\boxed{\therefore \nexists a \in R / S+T=R^3}$$

4) a)

$\dim(P_2)=3$ si A es L.I. $\Rightarrow$ A es base de P_2

$$\alpha(1+x)+\beta(-1+x^2)+\gamma(x+x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=a\\ \beta=a\\ \gamma=-a\end{cases} \text{ infinitas soluciones}$$

A no es linealmente independiente por lo tanto no es base. $\boxed{\text{Falso}}$

b)

De a) dim(gen(A)) = 2

$$-3-x+2x^2=\alpha(1+x)+\beta(-1+x^2) \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta=-3\\ \alpha=-1\\ \beta=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases} \quad \boxed{\text{Verdadero}}$$

5) a) $\boxed{\text{Verdadero}}$

$AB-A^2=I \Rightarrow |AB-A^2|=|I| \Rightarrow |A(B-A)|=1 \Rightarrow |A||B-A|=1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

b) $\boxed{\text{Falso}}$

Contraejemplo $\exists A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in R^{2x2} / A^2 = N \wedge A \neq N$

<u>04-03-10 2do REC. PARCIAL A CURSO DE VERANO</u>

1) Dadas las rectas:

$$L_1: x+2=\frac{y}{a}=z \quad ; \; L_2: \begin{cases}x=1+t\\ y=2+t \quad \forall t \in R\\ z=b\end{cases}$$

a) Halle los valores de las constantes reales “a” y “b” tal que las rectas L_1 y L_2 se corten formando un ángulo recto.

b) Para a = 1 y b = 0 , calcule la distancia entre las rectas

---

2) Dado el plano $\pi: (x,y,z)=(1,-1,1)+(1,0,1)t_1+(0,1,1)t_2 \,;\, t_1,t_2 \in R$ y la recta $L:(x,y,z)=(1,1,1)\lambda \,;\, \lambda \in R$. Encuentre:

a) El plano que contiene a la recta L y es perpendicular al plano π.

b) La proyección de la recta L sobre el plano π.

---

3) Dado el conjunto $A=\{(1,1,0);(0,a,1);(2,b,0)\}$

a) Encuentre el rango del conjunto para los distintos valores de las constantes a y b.

b) Para a = b = 2, halle el espacio generado por A y dé una base de dicho espacio.

c) Halle las coordenadas del vector $\vec{u}=(-1,5,3)$ en la base que obtuvo en el ítem anterior.

---

4) Dado el siguiente subespacio de R^4: $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 / x_1=x_2=x_3\}$, Encuentre:

a) Una base del complemento ortogonal de S.

b) Construya una base de R^4 con una base de S y la base que obtuvo en el ítem anterior.

5) Dada la matriz: $A = (A_1\ A_2\ \ A_3\ \ A_4) \in R^{4x4} / Det(A) = a \wedge a \in R - \{0\}$. Calcule:

$Det(2A^2B^{-1})$, siendo $B = (A_1 + 2A_3 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4)$

RESOLUCIÓN FECHA 04-03-10

1) a)

$A(-2,0,0) \in L_1;\ \vec{u}_1 = (1,a,1) // L_1\ (a \neq 0) \qquad B(1,2,b) \in L_2;\ \vec{u}_2 = (1,1,0) // L_2$

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow (1,a,1).(1,1,0) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \therefore \quad a = -1$ (cond. de perpendicularidad)

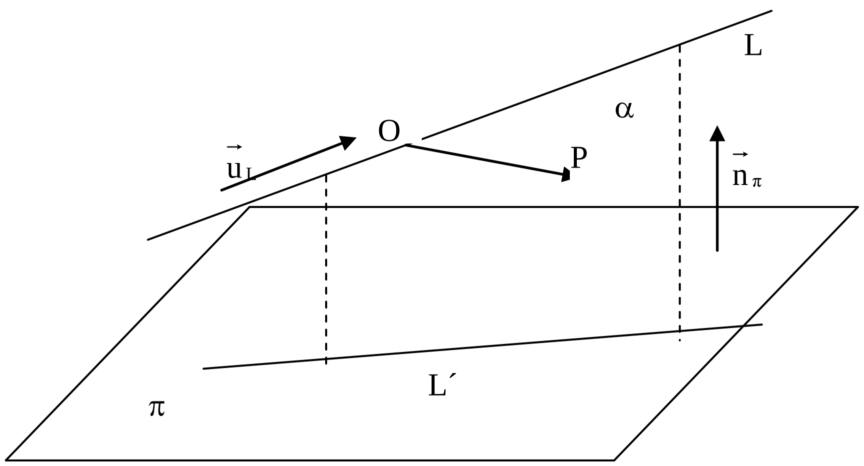
$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 x \vec{u}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \ \boxed{a = -1 \wedge b = \frac{1}{2}}$$

b)

$$b = 0 \Rightarrow b \neq \frac{1}{2} \therefore \text{las rectas son alabeadas } dist(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 x \vec{u}_2)|}{\|(\vec{u}_1 x \vec{u}_2)\|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{dist(L_1, L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\textbf{2) a) } \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi:\ x + y - z + 1 = 0$$



Construyo $\alpha / L \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi \therefore \ \alpha:\ \overrightarrow{OP}.(\vec{u}_L x \vec{n}_\pi) = 0$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \boxed{\alpha:\ x - y = 0}$$

b) $L' = \pi \cap \alpha : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $\boxed{L' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$

3) a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - b$$

Si $b \neq 2: \; rg(A) = 3$

Si $b = 2: \; rg(A) < 3 \wedge \{(1,1,0);(0,a,1)\}$ L.I. $\Rightarrow rg(A) = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a \in R \wedge b \neq 2: \; rg(A) = 3 \\ \forall a \in R \wedge b = 2: \; rg(A) = 2 \end{array}}$$

b) Si $a = b = 2: \; rg(A) = 2 \therefore gen(A) = gen\{(1,1,0);(0,2,1)\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} gen(A) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,1,0)\lambda_1 + (0,2,1)\lambda_2\} \text{ Una base } B_{\bar{A}} = \{(1,1,0),(0,2,1)\} \\ gen(A) = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y + 2z = 0\} \end{array}}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = 3 \;\therefore\; \boxed{\vec{u}_{B_{\bar{A}}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

4) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,0)t_1 + (0,0,0,1)t_2\}$

Una base de S: $B_S = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$

$$S^{\perp} : \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4),(1,1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4),(0,0,0,1) \rangle = 0 \end{cases} \quad S^{\perp} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad S^{\perp} : \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Una base de } S^{\perp} : \; B_S^{\perp} = \{(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\}}$$

$$\boxed{\text{Una base de } R^4 : \; B = B_S \cup B_S^{\perp} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1),(1,0,-1,0),(0,1,-1,0)\}}$$

5) $Det(B) = Det(A_1 + 2A_3 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4) \underset{1°C+2*2°C}{=} Det(A_1 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4) \underset{\substack{ext(-1) \\ ext3}}{=}$

$= -3Det(A_1 \quad A_3 \quad A_2 \quad A_4) \underset{A_3 \leftrightarrow A_2}{=} 3Det(A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4) = 3a$

$$Det(2A^2B^{-1}) = Det(2A^2)Det(B^{-1}) = 2^4 Det(A^2)[Det(B)]^{-1} = 16[Det(A)]^2[Det(B)]^{-1} = 16a^2(3a)^{-1} = \frac{16}{3}a$$

$$\boxed{Det(2A^2B^{-1}) = \frac{16}{3}a}$$