EJERCICIOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

51) Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Qué relación deben cumplir las constantes reales a y b para que la dimensión del subespacio solución $S_h = \{ \forall X \in R^3 / AX = N \}$ sea igual a uno y encuentre dicha solución.

b) Para la matriz que obtuvo en el ítem anterior encuentre el espacio columna y su dimensión.

c) Calcule la intersección y la suma de los dos subespacios anteriores e indique en qué casos son complementos ortogonales.

Rta.: a) $ab = 1$; $S_h = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (-a,1,1)t \wedge t \in R\}$

52) **b)** $Ec(A) = \{(x,y,z) \in R^3 / x - ay - az = 0\}$; $\dim Ec(A) = 2$

53) **c)** $S_h \cap Ec(A) = \{(0,0,0)\}$; $S_h \oplus Ec(A) = R^3$

Son complementos ortogonales si: $(a = b = 1 \vee a = b = -1)$

---

52) Dada la función: $F: R^3 \to R^3 / F(X) = AX$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Encuentre el conjunto imagen de la función y justifique porque es un subespacio del codominio.

b) Halle todos los vectores cuya imagen es el mismo vector (AX=X). Cuál es la interpretación geométrica.

Rta.: a) $Im(F) = \{(x,y,z) \in R^3 / z = 0\}$, plano que contiene al origen

b) $\{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,-1,0)t \wedge t \in R\}$, recta que contiene al origen

---

53) Sea $T: R^3 \to R^3 / T(1,0,2) = (0,0,0)$; $T(0,3,0) = (-1,2,1)$; $T(1,0,0) = (0,0,0)$

¿Define una transformación lineal?¿Es única?. Justifique su respuesta, y si es afirmativa, halle la expresión analítica de la transformación lineal.

Rta.: Si, es única ya que el conjunto $\{(1,0,2), (0,3,0) ; (1,0,0)\}$ es una base del dominio de T

$$T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}y \,;\, \frac{2}{3}y \,;\, \frac{1}{3}y \right)$$

---

54) Sea $T: R^3 \to R^4 / T(1,0,1) = (0,0,2,1)$; $T(1,a,1) = (1,0,0,0)$; $T(2,0,a) = (0,-2,0,0)$

a) Halle todos los $a \in R / T$ define una transformación lineal única (única para cada valor de a hallado) .

b) Sea $a = 1$, obtenga la expresión analítica de la transformación lineal.

Rta.:

a) $\forall a \in R - \{0;2\}$ $T: R^3 \to R^4 / T(x,y,z) = \left(\frac{y}{a}; \frac{2x-2z}{a-2} ; \frac{2ax-4z}{a-2} - \frac{2}{a}y ; \frac{ax-2z}{a-2} - \frac{y}{a} \right)$

b) Si $a = 1$: $T: R^3 \to R^4 / T(x,y,z) = (y ; -2x+2z; -2x-2y+4z; -x-y+2z)$

---

55) Sea $T: R^3 \to R^2 : T(x,y,z) = (x - z\ , 3y)$. Halle el núcleo y la imagen, y una base de cada uno. Verifique el teorema de las dimensiones.

Rta.: $Nu(T) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,0,1)\lambda\}$; $B_{Nu(T)} = \{(1,0,1)\}$; $\dim Nu(T) = 1$

$Im(T) = R^2$; $B_{Im(T)} = \{(1,0);(0,1)\}$; $\dim Im(T) = 2$; $\dim Nu(T) + \dim Im(T) = \dim R^3$

---

56) Halle la expresión analítica de una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ tal que :

$Nu(T) =$ gen $\{(-2,1,0)\}$, Imagen T : vectores posición incluidos en el plano $\pi : x + 2y - 3z = 0$

Rta.: Una de ellas es: $T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = (3x + 6y + 2z\ , -z\ , x + 2y)$

---

57) Defina, si es posible, una transformación lineal $T: R^4 \to R^3$ tal que:

$T(1,0,0,1) = (2,0,0)$; $T(0,1,0,1) = (0,1,0)$; $T(0,0,1,1) = (0,0,1)$ y cuyo núcleo sea $Nu(T) =$ gen $\{(0,0,0,1)\}$

¿Cuál es la dimensión del núcleo y de la imagen? Justifique su respuesta. Halle la imagen de T.

Rta.: $T: R^4 \to R^3 / T(1,0,0,1) = (2,0,0) \wedge T(0,1,0,1) = (0,1,0) \wedge T(0,0,1,1) = (0,0,1) \wedge T(0,0,0,1) = (0,0,0)$

dimNu(T) = 1; dimIm(T) = 3; $\dim Nu(T) + \dim Im(T) = \dim R^4$; Im(T)=$R^3$

---

58) Halle $a \in R$ tal que exista una única transformación lineal que cumpla las siguientes condiciones: $T(0,2,0) = (2,0,2)$; $T(1,0,1) = (0,1,2)$; $T(1,1,1) = (a,1,3)$; $Nu(T) = \{(x,y,z) \in R^3 / 2x = -y = z\}$.

Justifique

Obtenga la expresión analítica de la transformación, su imagen y verifique el teorema de las dimensiones.

Rta.: a = 1 $T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = (-2x + y + 2z ; 2x - z\ ; 2x + y)$

dimNu(T) = 1; dimIm(T) = 2; $Im(T) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,0,1)t_1 + (2,-1,0)t_2 \wedge t_1, t_2 \in R\}$

---

59) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halle $a \in R$ tal que $T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea una transformación lineal cuyo núcleo tenga dimensión distinta de cero.

b) Con el valor de a obtenido anteriormente, halle la expresión analítica de la transformación lineal y una base de su imagen.

Rta.: **a)** a = 1

b) $T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + y\ ; -2y + z\ ; x + z\right)$; $B_{Im(T)} = \{(1,-2,0)\ ; (0,1,1)\}$

---

60) Sea π el plano que contiene al eje "z" y al punto (1,2,1). Defina una transformacion lineal $F: R^3 \to R^{2x2}$ que verifique:

Nu (F) $\subseteq \pi$ e Im(F) = { M $\in R^{2x2}$ / M es simetrica y de traza nula}

Obtenga la expresión analítica de F y el núcleo.

Rta.: Una de ellas es:

$$F: R^3 \to R^{2x2} / F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \;;\; Nu(F) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (0,0,1)\lambda\}$$

---

61) Sea $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ en las bases $B_1 = \{(1,0,0)\ (-1,1,0)\ (0,0,3)\}$; $B_2 = \{(1,1)\ (0,2)\}$. Halle la expresión analítica de la transformación, núcleo, imagen y una base de cada uno.

Rta.: $T: R^3 \to R^2 / T(x,y,z) = \left(y - \frac{2}{3}z \,,\, 2x + 3y \right)$;

$Nu(T) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (-3,2,3)\lambda \wedge \lambda \in R\}$; $B_{Nu(T)} = \{(-3,2,3)\}$; $\dim Nu(T) = 1$

$Im(T) = R^2$; $B_{Im(T)} = \{(1,0);(0,1)\}$; $\dim Im(T) = 2$

---

62) Sea $T: R^3 \to R^2 / T(x,y,z) = (x - 2z \,,\, y + 3x)$ y las bases $B_1 = \{(-1,1,0)\ (0,0,3)\ (2,0,0)\}$; $B_2 = \{(0,1)\ (-2,1)\}$

a) Halle la matriz asociada a la transformación lineal en las bases B_1, B_2

b) Halle las coordenadas, en la base B_2, de la imagen por la transformación lineal del vector $\vec{u} = (3,1,2)$

Rta.: a) $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & 7 \\ \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\left[T\left(\vec{u}\right) \right]_{B2} = \begin{bmatrix} \frac{19}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

---

63) Sea $T: R^3 \to R^2 / M_{B1B2} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases: $B_1 = \{(1,0,0);(0,-3,1);(0,0,-2)\}$ y $B_2 = \{(2,0);(0,-1)\}$

a) Halle $a \in R$, si existe, tal que $T(2,0,1) = (1, -5/2)$

b) Si $a = 1$, obtenga, utilizando la matriz M, la imagen del vector (1,0,-3)

Rta.: a) No existe a $\forall a \in R : T(2,0,1) = (4a - 2, 5/2)$ **b)** $\left(8; -\frac{1}{2}\right)$

---

64) Sea $M_{B1\,B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a una transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ en las bases $B_1 = \{(1,0,0);(-1,1,0);(0,0,2)\}$; $B_2 = \{(1,-1);(0,1)\}$

Halle la expresión analítica de la transformación lineal, núcleo, imagen y una base de cada uno.

Rta.: $T: R^3 \to R^2 / T(x,y,z) = \left(x + y + \frac{1}{2}z \,,\, -x + \frac{1}{2}z \right)$

$\mathrm{Nu(T)} = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,-2,2)\lambda \wedge \lambda \in R\}$; $B_{Nu(T)} = \{(1,-2,2)\}$; $\dim \mathrm{Nu(T)} = 1$

$\mathrm{Im(T)} = R^2$; $B_{Im(T)} = \{(1,0);(0,1)\}$; $\dim \mathrm{Im(T)} = 2$

---

65) Sea $T: R^3 \to R^3$/ la matriz asociada a la transformación lineal es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{B1B2}$ siendo:

$B_1 = \{(2,0,0), (0,-2,1), (0,0,1)\}$ $B_2 = \{(0,0,1), (1,1,0), (0,0,3)\}$

a) Sin obtener la expresión analítica de la transformación lineal, calcule la dimensión del núcleo de la transformación lineal.

b) Encuentre la imagen de $\vec{u} = (3,0,1)$ expresada en la base canónica, utilizando la matriz A.

Rta.: a) dimNu(T) = dimR^3- rg(A) = 3-3 = 0 **b)** $T(\vec{u}) = (1,1,9)$

---

66) Sea $T: R^2 \to R^3 / T(x,y) = (x + 2y\ , y\ ,\ x + y)$ una transformación lineal

a) Halle B_1 : base de $\mathbf{R}^2$ / $M\,(\,T)_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $B_2 = \{(1;1;0);(1;0;1);(0;1;1)\}$

b) Halle una base y la dimensión de la imagen de T.

Rta: a) B_1 = { (-1 ; 1) ; (1 ; 1) } **b)** { (1 ; 1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 1) } , dim Im(T) = 2

---

67) Sea $T: V \to W / T(X) = Y$ una transformación lineal. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justifique o dé un contraejemplo.

a) Si { X_1 ; X_2 ; .....; X_n } es linealmente independiente entonces {T (X_1) ; T (X_2) ; ....; T (X_n)} es linealmente independiente.

b) Si A={ X_1 ; X_2 } $\subset$ V entonces B={ T ($X_1 + X_2$) } $\subset$ Im (T).

Rta: a) Falsa, $T: R^2 \to R^2 / T(x;y) = (0,0)$; A={(1;0);(0;1)} es l.i. y B={(0;0)} no es l.i.

b) Verdadera

---

68) Sea T : $R^2 \to R^2$ una transformación lineal tal que T (x ; y) = (2 x - y ; y)

Halle, si es posible, una base B de R^2 / $M\,(\,T\,)_{B|B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rta: Existen infinitas bases B, son de la forma $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \right\}$ con $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

---

69) Dada la función $F: R^3 \to R^3$ tal que para todo vector $u = (x;y;z) \in R^3$

$F(x;y;z) = u \times v$ donde $v = (1;-1;2)$ vector constante.

Nota: $(u \times v)$ producto vectorial

a) Demuestre que F es una transformación lineal.

b) Encuentre el núcleo y la imagen e interprete geométricamente.

Rta: a) $F: R^3 \to R^3 / F(x;y;z) = (2y + z\ ;\ -2x + z\ ;\ -x - y)$

b) $\mathrm{Nu(F)} = \{(x,y,z) = (1,-1,2)\lambda \wedge \lambda \in R\}$ el núcleo es una recta que contiene al origen y es paralela al vector (1;-1;2)

$\text{Im}(F)=\{(x,y,z)=(1,1,0)\alpha+(-2,0,1)\beta \wedge \alpha;\beta\in R\}$ la imagen es un plano que contiene al origen y es perpendicular al vector (1 ; -1 ; 2). El núcleo y la imagen son complementos ortogonales.

---

70) La matriz asociada a una transformación lineal $F: R^2 \to R^3$, respecto a las respectivas bases canónicas es $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \\ k & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar todos los valores de k para que F sea inyectiva.

b) Para k = 0, y una base B_1 = { (1 ; 2) ; (-1 ; 3) }, encuentre una base B_2 de R^3 tal que la matriz asociada a F respecto a éstas bases sea:

c) $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justificar

Rta: a) $k \in R-\{2\}$ **b)** B_2 = { (2 ; 6 ; 4) ; (-2 ; 4 ; 6) ; (a ; b ; c) } tal que $a-b+c \neq 0$

EJERCICIOS DE AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

71) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿A es diagonalizable? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué vectores permanecen constantes luego de la transformación lineal?

$$T: R^2 \to R^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

i)

Rta.: a) No, $\dim S_{\lambda=1} = 1$, no existe una base de R^2 para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) $T\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$; $\vec{u} = (0;1)t \wedge t \in R$

---

72) Si $A \in R^{4\times 4}$ es una matriz tal que su polinomio característico tiene las siguientes raíces $\lambda_1 = 2$ raíz simple, $\lambda_2 = -1$ raíz doble y $\lambda_3 = 0$ raíz simple. Estudie si A es diagonalizable en los siguientes casos; en caso afirmativo halle la matriz D correspondiente, y P tal que $D = P^{-1}AP$. Justifique.

a) S_{λ_1} = gen{(1;1;1;1)} ; S_{λ_2} = gen{(1;0;1;0);(0;0;0;0)}; S_{λ_3} = gen{(3;2;1;0)}

b) S_{λ_1} = gen{(2;3;4;5)} , S_{λ_2} = gen{(0;1;2;0);(1;2;3;0)} ; S_{λ_3} = gen{(1;0;2;0)}

Rta: a) A no es diagonalizable ya que el subespacio propio asociado a λ_2 tiene dimensión uno y la multiplicidad de la raíz es dos.

b) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge |P| \neq 0$

---

73) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ asociada a una T.L. $T: R^3 \to R^3 / T(\vec{u}) = A\,\vec{u}$

a) Halle los valores propios y los correspondientes espacios propios, una base y dimensiones.

b) Basándose en los autovalores justifique porqué la transformación es una automorfismo.

c) Si la matriz A es diagonalizable, halle la matriz D y la matriz P tal que: $D = P^{-1} A\, P$

Rt.a: a) $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 3$ doble. $S_1 = \{(x;y;z) \in R^3 / (x;y;z) = (1;2;1)\, a\}$; $B_{S1} = \{(1;2;1)\}$;

$\dim S_1 = 1$ $S_2 = \{(x;y;z) \in R^3 / (x;y;z) = (1;0;-1)\, b + (0;1;0)\, c\}$; $B_{S2} = \{(1;0;-1);(0;1;0)\}$; $\dim S_2 = 2$

b) Como los autovalores no son nulos entonces $|D| = |A| \neq 0$ por lo tanto el rango de la matriz A es tres igual a la dimensión de la imagen y en consecuencia la dimensión del núcleo es cero por el teorema de la dimensión, la transformación es sobreyectiva e inyectiva (isomorfismo) y además es una transformación en R^3 (endomorfismo) por lo tanto es un automorfismo.

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

---

74) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre los valores propios y los vectores propios.

b) Existe una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal?, en caso afirmativo encuentre la matriz semejante a A que es diagonal.

Rta.: a) autovalores 0 y 3 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de autovectores.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{[B|B]} = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

---

75) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Demuestre que :

a) Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ entonces A es diagonalizable.

b) Si a = d = 1 , b = 3 y c = -1 , verifique si la matriz es diagonalizable en R.

Rta.: a) El 1er miembro de la desigualdad es el discriminante de la ecuación característica y como es positivo las raíces de dicha ecuación (autovalores) son reales y distintas por lo tanto los autovectores asociados son linealmente independientes y constituyen una base para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) A no es diagonalizable ya que la ecuación característica no posee raíces reales.

---

76) Demuestre que:

a) Si $\lambda=0$ es un autovalor de la matriz A entonces A no es inversible.

b) Si λ es autovalor de la matriz A entonces λ es autovalor de su traspuesta.

Rta: a) $|A-\lambda I| = 0 \wedge \lambda = 0 \Rightarrow |A| = 0 \therefore$ A no es inversible

b) λ es autovalor de $A: |A-\lambda I| = |(A-\lambda I)^T| = |A^T - (\lambda I)^T| = |A^T - \lambda I^T| = |A^T - \lambda I|$

Por transitiva de la igualdad: $|A-\lambda I| = |A^T - \lambda I|$ los polinomios característicos de A y A^T son iguales por lo tanto los autovalores también lo son.

---

77) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ halle los valores de b y k reales para que A sea diagonalizable.

Rta.: $\forall b \in R \wedge k = 0$; $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

---

78) Demuestre que:

Si dos matrices semejantes entonces poseen los mismos autovalores.

Encuentre un contraejemplo que muestre que el recíproco del anterior no es válido.

Rta.: a) A y B semejantes $\Rightarrow \exists P / B = P^{-1}AP \Rightarrow |B-\lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| =$

$= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P| = |P^{-1}(A-\lambda I)P| = |P^{-1}||A-\lambda I||P| = |P^{-1}||P||A-\lambda I| = 1|A-\lambda I| = |A-\lambda I|$

Por transitiva de la igualdad: $|B-\lambda I| = |A-\lambda I|$ los polinomios característicos de A y B son iguales por lo tanto los autovalores también lo son.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tienen la misma ecuación característica: $\lambda^2 = 0$ y no son semejantes:

$\nexists P / B = P^{-1}AP$. Dos matrices pueden tener los mismos autovalores y no ser semejantes.

---

79) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

a) Verifique si es diagonalizable. Si lo es, halle la matriz $P / PAP^{-1} = D$

b) Halle todos los vectores de R^3 tales que permanecen constantes luego de la transformación lineal

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Rta.: a) A no es diagonalizable, el autovalor es triple (1) y la dimensión del subesp. propio es uno.

b) $S_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = (0,0,1)t\}$

---

80) Sea la matriz $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Halle los autovalores de la matriz C y determine qué vectores de R^3 permanecen sin cambio luego de aplicarles la transformación lineal $T: R^3 \to R^3 / T(\vec{u}) = C\vec{u}$

Rta.: autovalores { -2,1,2} $S_{\lambda=1} = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (0,-1,1)t\}$

81) Justifique si es V o F:

Sea $A \in R^{n\,x\,n}$, diagonalizable: $\exists P \in R^{nxn} /\ P^{-1}AP = D$ entonces $A^4 = PD^4P^{-1}$

Rta.: $P^{-1}AP = D$

Premultiplicamos por P y posmultiplicamos por P^{-1}: $P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$

Asociatividad del producto: $(PP^{-1})A(P\,P^{-1}) = PDP^{-1}$

P^{-1} es la inversa de P: $PP^{-1} = I$ (neutro del producto): $A = PDP^{-1}$

$A^4 = (PDP^{-1})^4$

$A^4 = [(PDP^{-1})(PDP^{-1})][(PDP^{-1})(PDP^{-1})]$

Asociatividad del producto y $PP^{-1} = I$ $A^4 = (PD^2P^{-1})(PD^2P^{-1})$

" $A^4 = PD^4P^{-1}$

También se puede expresar como: Si λ es autovalor de A entonces λ^4 es autovalor de A^4.

82) Sea $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ obtenga todos los valores de $a \in R$ tales que:

a) Sus autovalores sean distintos. ¿Es diagonalizable para estos valores de a?

b) A tenga un autovalor de multiplicidad 2. ¿ es diagonalizable? Justifique.

Rta.: a) Como A es una matriz triangular los autovalores son los elementos de la diagonal principal entonces $a \in R - \{1;2\}$. Si ya que los los autovectores asociados a autovalores distintos son linealmente independientes y constituyen una base para la cual la matriz A resulta diagonal.

b) $a = 1 \vee a = 2$. Para a=1, el autovalor doble es λ =1 y $\dim S_{\lambda=1} = 1$ entonces A no es diagonalizable. Para a=2 ,el autovalor doble es λ =2 y $\dim S_{\lambda=2} = 2$ entonces A es diagonalizable.

83) Sabiendo que la matriz asociada a una transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ cumple con:

Es simétrica, $T(1;0;0) = (2;0;1)$, $T(0;1;0) = (0;3;0)$ y el vector (1;1;1) es un autovector.

Encuentre los autovalores y los autoespacios asociados y justifique porque son ortogonales.

Rta.: Autovalores: 2 y 3 (doble). Autoespacios:

$S_{\lambda=2} = gen\{(1;0;-1)\}$; $S_{\lambda=3} = gen\{(1;0;1);\ (0;1;0)\}$ Porque la matriz es simétrica

84) Se desea obtener la proyección de un punto cualquiera del espacio sobre el plano $\pi: \ x+y+z=0$

a) Mediante una transformación lineal cuya matriz asociada resulte diagonal.

b) Mediante una transformación lineal cuya matriz asociada opere en base canónica.

c) Compare lo que obtuvo en el ítem anterior con la proyección de un punto sobre un plano visto en geometría.

Rta.: a) $T: R^3 \to R^3 / T(X) = AX$ si la base elegida es $B = \{(1,-1,0);(0,1,-1);(1,1,1)\}$

$A_{[B|B]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matriz standard.

c) Siendo P´(x´,y´,z´) la proyección de P(x,y,z) sobre el plano π entonces:

$P´\left(\frac{2x-y-z}{3};\frac{-x+2y-z}{3};\frac{-x-y+2z}{3}\right)$ lo mismo que se obtiene haciendo: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x´ \\ y´ \\ z´ \end{pmatrix}$

EJERCICIOS DE CÓNICAS

85) Sea la ecuación $x^2 - y^2 - 2x - 6y - 9 = 0$

Identifique y grafique la curva.

Rta.: $(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$. Hipérbola equilátera con centro en C(1,-3)

---

86) Dada $9x^2 + k y^2 + 54x - 2ky + 17 = 0$ encuentre si es posible, k real para que la ecuación en el plano corresponda a una elipse de semieje mayor a = 3 y eje focal paralelo al eje y.

Rta.: k=8; $\frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

---

87) Sea la curva $x^2 - 2x + 3hy^2 + 9ky = 89$ que pasa por los puntos A(4,3) y B(4,-3)

Halle h y k reales, identifique y grafique la curva.

Rta.: $h = 3 \wedge k = 0$; $\frac{(x-1)^2}{90} + \frac{y^2}{10} = 1$. Elipse con centro en C(1,0), eje focal eje x, radio mayor=a= $\sqrt{90}$ y radio menor=b= $\sqrt{10}$

---

88) Dada la ecuación: $x^2 + hy^2 - 4x = 0$ en R^2.

Qué lugar geométrico representa para los distintos valores de la constante h.

Rta.: Si h<0 hipérbola con centro en C(2,0) y eje focal eje x. Si h=0 dos rectas paralelas x=0; x=4. Si h>0 elipse con centro en C(2,0), en particular si h=1 circunferencia de radio R=2.

---

89) La siguiente ecuación en R^2 corresponde a una hipérbola: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

a) Escriba la ecuación de todas las hipérbolas que tengan las mismas asíntotas que la dada y el mismo eje focal.

b) Escriba la ecuación de todas las hipérbolas que tengan las mismas asíntotas que la dada pero que sean de eje focal paralelo al eje y.

Rta.: a) $\frac{(x+2)^2}{9k} - \frac{(y+3)^2}{4k} = 1 \wedge k > 0$ **b)** $\frac{(x+2)^2}{9k} - \frac{(y+3)^2}{4k} = 1 \wedge k < 0$

---

90)

a) Halle la ecuación de una parábola sabiendo que su lado recto tiene una longitud de 4 unidades, su foco está sobre el eje *y* negativo, y el vértice en el origen.

b) Grafique y parametrice la parábola hallada, indicando en el gráfico la dirección en que se recorre la parábola.

Rta.: a) $x^2 = -4y$ **b)** $c: \vec{r}(t) = (x, y) = \left(t, -\frac{t^2}{4} \right) \quad ; \quad t \in R$

---

91) Escriba las ecuaciones paramétricas de la ecuación cartesiana $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ para $1 \le x \le 2$ Identifique y grafique la curva.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = \left(1 + \frac{1}{4} t^2, 2 + t \right) \quad ; \quad -2 \le t \le 2$ arco de parábola recorrida desde A(2,0) hasta B(2,4), con vértice en (1,2) eje focal paralelo al eje x

---

92) Sea la curva $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 - 3\cos t, 2 + \operatorname{sen} t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$

a) Identifique y grafique la curva

b) Reparametrice la curva de modo que recorra el arco que desde A(1,3) hasta B(-2,2)

Rta.: a) $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$ Elipse con centro en C(1,2) , eje focal paralelo al eje x, radio mayor=a=3 y radio menor=b=1. **b)** $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 + 3\cos t, 2 + \operatorname{sen} t) \quad ; \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

---

93) Sea la curva $c: \vec{r} = (1 + 4\cos t, 1 - \operatorname{sen} t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$

Halle la ecuación cartesiana, identifique , grafique e indique en qué dirección se recorre.

Rta.: $\frac{(x-1)^2}{16} + (y-1)^2 = 1$ Elipse con centro en C(1,1) y radio mayor=a=4 y radio menor=b=1. Para la forma paramétrica la curva se recorre en sentido horario partiendo del punto (5,1).

---

94) Parametrice la curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ de modo que se recorra en dirección antihoraria desde el punto (0,3) hasta el punto (2,0). Grafique la porción de curva recorrida.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (2\operatorname{sen} t, 3\cos t) \quad ; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ Elipse con centro en el origen eje focal eje y, radio mayor a=3 y radio menor b=2.

---

95) Parametrice la curva $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ de modo que se recorra en dirección antihoraria. Grafique la curva.

Rta.: $c: \vec{r}(t) = (x, y) = (1 + \cos t, 2\operatorname{sen} t) \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi$. Elipse con centro en C(1,0), eje focal paralelo al eje x, radio mayor=a= 3 y radio menor=b=2

EJERCICIOS DE SUPERFICIES

96) Sea la superficie $\sigma: \quad Ax^2+(A-5)y^2=Bz$

a) Halle el conjunto de valores $A,B\in R/\sigma$ sea un paraboloide.

b) Si A = 5 y B = 1 identifique y grafique la superficie utilizando sus trazas.

Rta.: a) $A\neq 0\wedge A\neq 5\wedge B\neq 0$ **b)** Cilindro parabólico

---

97) Sea la superficie : $Ax^2+B(y-1)^2+C(z+2)^2=1$

a) Halle A , B , C $\in R$ tal que:

La intersección con el plano $y=1$ sea la curva $x^2-(z+2)^2=-1$ y la intersección con el plano $x=1$ sea la curva $\dfrac{-(y-1)^2}{4}+(z+2)^2=2$. Grafique e identifique la superficie

b) Grafique e identifique la superficie cuando $A=\dfrac{1}{4}\wedge B=-1\wedge C=0$

Rta.: a) $A=-1\wedge B=-\dfrac{1}{4}\wedge C=1$ hiperboloide de dos hojas **b)** Cilindro hiperbólico

---

98) Sea la superficie: $\sigma: A(x-1)^2+By^2+Cz^2=1$

Identifique y grafique la superficie sabiendo que se cumplen simultáneamente:

$\sigma\cap(y=0):$ circunferencia de radio 2

$\sigma\cap(z=0):$ hipérbola de semiejes 2 y 3

Rta.: $A=C=\dfrac{1}{4}\wedge B=-\dfrac{1}{9}$ Hiperboloide de una hoja de revolución de eje paralelo al eje y .

---

99) Sea la superficie $\sigma: A(x-1)^2+By^2+z^2=1$.

a) Halle $A,B\in R$ tal que :

$\sigma\cap(x=1):$ elipse de eje focal paralelo al eje *y* , semiejes de longitudes 2 y 1

$\sigma\cap(z=0):$ hipérbola tal que una de sus asíntotas tiene pendiente $m=\sqrt{2}$

b) Grafique e identifique la superficie cuando $A=1\wedge B=0$

Rta.: a) $A=-\dfrac{1}{2}\wedge B=\dfrac{1}{4}$ Hiperboloide de una hoja de eje x. **b)** Cilindro circular de eje // eje y

---

100) Sea la superficie $\sigma: Ax^2+(A-1)y^2+2Az^2=1$

a) Halle, si existen , todos los valores de $A\in R$ tales que la superficie sea:

i) Elipsoide

ii) Hiperboloide de una hoja

iii) Superficie cilíndrica elíptica

b) Identifique y grafique la superficie si A = $\dfrac{1}{2}$

Rta.: a) i) A>1 **ii)** 0<A<1 **iii)** A=1 **b)** caso **ii)** Hiperboloide de una hoja de eje y.

---

101) Dada la ecuación $x^2+b^2y^2-z^2=k^2$, halle los valores de b y k de manera que la ecuación corresponda a:

a) Un hiperboloide de una hoja de revolución, cuya traza con el plano $x = 3$ es una hipérbola equilátera de semiejes iguales a 3.

b) Una superficie cilíndrica cuya traza con el plano $z = 1$ es un par de rectas paralelas tales que la distancia entre ambas es $2\sqrt{5}$.

Rta: a) $|b|=1 \wedge |k|=\sqrt{18}$ **b)** $b = 0 \wedge |k|=2$

---

102) Analice por sus trazas, identifique y grafique para los distintos valores de A y B

$$-A^2 x^2 - y^2 + \frac{z^2}{4} = B$$

Rta: $A=0 \wedge B\neq 0$ cilindro hiperbólico. A=B=0 dos planos que contienen al eje x.
$A\neq 0 \wedge B>0$ hiperboloide de dos hojas. $A\neq 0 \wedge B<0$ hiperboloide de una hoja. $A\neq 0 \wedge B=0$ superficie cónica.

---

103) Halle la ecuación y grafique la superficie generada por el giro de $\begin{cases} x=0 \\ z^2=y \end{cases}$ alrededor del eje y .

Rta: $x^2+z^2=y$ Paraboloide de revolución

---

104) Dada la ecuación $x^2+Ay^2=Bz$ en R^3

Determine A y B de manera que la ecuación corresponda a:

a) Un paraboloide hiperbólico cuya traza con el plano xy sea un par de rectas perpendiculares, grafique.

b) Un paraboloide elíptico cuya traza con el plano z = 1 sea una elipse de eje focal eje x, grafique.

c) Un cilindro parabólico cuya traza con el plano $y = -1$ sea una parábola con foco en F(0;-1;-1), grafique.

Rta: **a)** $A = -1 \wedge B \neq 0$, **b)** $A > 1 \wedge B > 0$, **c)** $A = 0 \wedge B = -4$

---

105) Dada la superficie esférica: $x^2+y^2+z^2-3x+2y+k=0$ y el plano $\alpha: x-y-\frac{1}{2}=0$

Determine el valor de k para que la esfera sea tangente al plano y el punto de tangencia.

Rta: $k=\frac{5}{4}$; $T\left(\frac{1}{2};0;0\right)$

EJERCICIOS DE ROTOTRASLACIÓN

106) Sea la curva : $x^2-6xy+y^2+1=0$

a) Mediante una rotación, identifique la curva

b) Grafique la curva en el nuevo sistema de coordenadas, superpuesto al sistema original.

Rta.: a) $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;$A_{[B|B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;$B = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) ; \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$\frac{x'^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y'^2}{\frac{1}{4}} = 1$ Hipérbola con centro en el origen y eje focal eje x´.

---

107) Sea la curva $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 1$

a) Mediante una rotación, identifique la curva.

b) Grafique la curva en el nuevo sistema de coordenadas, superpuesto al sistema original.

Rta.: $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{[B|B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) ; \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{6}} = 1$ Elipse con centro en el origen y eje focal eje x´.

---

108) Halle todos los $a \in R$ tales que $x^2 + 2axy + 4y^2 = 1$ represente un par de rectas. Grafique para alguno de los valores hallados.

Rta.: $|a| = 2$ .Si a=2: $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{[B|B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right) ; \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$

$x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \vee x' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ dos rectas paralelas al eje y´ y equidistantes del origen.

Si a=-2: $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_{[B|B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right) ; \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \vee y' = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ dos rectas paralelas al eje x´ y equidistantes del origen.

---

109) Sea la curva: $3x^2 - 8xy - 12y^2 = 52$ Identifique la curva y grafíquela en el sistema original de coordenadas superpuesto al nuevo sistema de coordenadas.

Rta.: $P = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{[B|B} = \begin{pmatrix} -13 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{17}}; \frac{4}{\sqrt{17}} \right) ; \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}} \right) \right\}$

$-\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{13} = 1$ Hipérbola con centro en el origen y eje focal eje y´.

---

110) Para la siguiente ecuación: reduzca a la forma canónica, identifique el lugar geométrico en R^2 y grafique.

$$x^2+2xy+y^2-8x+8y=0$$

Rta.: $B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $x'^2 = -4\sqrt{2}\,y'$ Parábola

---

111) Dada la ecuación $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$ en R^2 lleve a la forma canónica, identifique y grafique.

Rta: Elipse $\frac{x''^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{9}{16}} = 1$ ecs. de traslación $\begin{cases} x'' = x' + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \frac{1}{4\sqrt{5}} \end{cases}$

---

112) Dada la ecuación $16x^2+kxy+9y^2+50x-100y+50=0$ en R^2

a) Halle $k \in R$ de manera que la ecuación corresponda a una parábola.

b) Para el valor de k < 0 obtenido en **a)**, lleve a la forma canónica y grafique.

Rta: a) $|k|=24$ **b)** $P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; $A_{[B|B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}$; $B=\left\{\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right) ; \left(-\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)\right\}$ $y'^2=2x'$

---

113) Dada la ecuación $2xy-4x=1$ en R^2 lleve a la forma canónica, identifique y grafique.

$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $A_{[B|B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) ; \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$x''^2-y''^2=1$ ecs. de traslación $\begin{cases}x''=x'-\sqrt{2}\\ y''=y'-\sqrt{2}\end{cases}$ Hipérbola equilátera

---

PARCIALES Y RECUPERATORIOS PARTE B

25/02/2010 PARCIAL B CURSO DE VERANO

1)

Dada la transformación lineal: $T: R^3 \to R^4 / T(x;y;z) = (x-y; ax-ay;\ x+ay;\ x-y+az)$

a) Halle los valores de la constante "a", si existen, tal que la transformación resulte inyectiva.

b) Para a = -1, encuentre todos los vectores de R^3, que tengan por imagen al vector (1,-1,1,1).

2)

a) Encuentre la matriz (A) que caracteriza a una transformación lineal T que cumpla con:

$T: R^3 \to R^3 / Nu(T) = \{(x,y,z) \in R^3 / (x,y,z) = (1,-1,2)t\}$ y $\forall \vec{u} \in S: T(\vec{u}) = 3\vec{u}$

Siendo $S = \{(x,y,z) \in R^3 / x - z = 0\}$

b) Basándose en las características de la transformación dadas anteriormente, justifique porque la matriz asociada a la TL (A) es diagonalizable y halle: $P \in R^{3x3}$ y $D \in R^{3x3} / P^{-1}AP = D$

3) Dada la ecuación: $x^2 + ky^2 - 8y = 0$ en R^2

a) Analícela e identifique el lugar geométrico para los distintos valores de la constante "k".

b) Para k = 4 grafique la curva y halle una forma paramétrica.

4) La siguiente ecuación $x^2 + A(z-1)^2 = By$ en R^3 representa una superficie, en qué casos se trata de:

a) Un paraboloide de revolución, indique el eje de giro y grafique.

b) Un cilindro parabólico recto cuya intersección con el plano y = 2 sean dos rectas que se encuentran a una distancia igual a 2 del plano x = 0, grafique la superficie y las rectas.

5) Indique V o F, justifique o muestre un contraejemplo según corresponda:

a) Si $A^2 = A$ y λ es autovalor de A entonces λ^2 es autovalor de A.

b) Si el rango de una matriz cuadrada es menor que el orden entonces dicha matriz no es diagonalizable.

RESOLUCIÓN FECHA 25/02/2010

1) **a)** T es inyectiva sii dimNu(T) = 0 y dimNu(T)+dimIm(T) = dimR^3 entonces

dimIm(T) =3 = rg(A) ; T es inyectiva sii rg(A) =3

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \therefore rg(A) = 3 \Leftrightarrow a+1 \neq 0 \wedge a \neq 0$$

T es inyectiva sii $a \in R - \{-1;0\}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ -1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x-y=1 \\ z=0 \end{cases} \begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

$$C=\{(x,y,z)\in R^3/(x,y,z)=(0,-1,0)+(1,1,0)\ t\}$$

C no es subespacio de R^3 ya que el vector nulo no pertenece al conjunto (no es espacio vectorial).

2) a) B_S={(1,0,1);(0,1,0)} base de S

T(1,0,1)=(3,0,3) ; T(0,1,0)=(0,3,0) y T(1,-1,2)=(0,0,0)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3°f-1°f+2°f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) (1,-1,2) autovector asociado al autovalor 0; (1,0,1) y (0,1,0) autovectores asociados al autovalor 3 y { (1,0,1); (0,1,0); (1,-1,2)} base de R^3, por lo tanto A es diagonalizable, siendo:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) a) $x^2+ky^2-8y=0$

Si k=0 $x^2=8y$ Parábola

Si $k\neq 0$: $x^2+k\left(y^2-\frac{8}{k}y+\frac{16}{k^2}\right)=\frac{16}{k}$

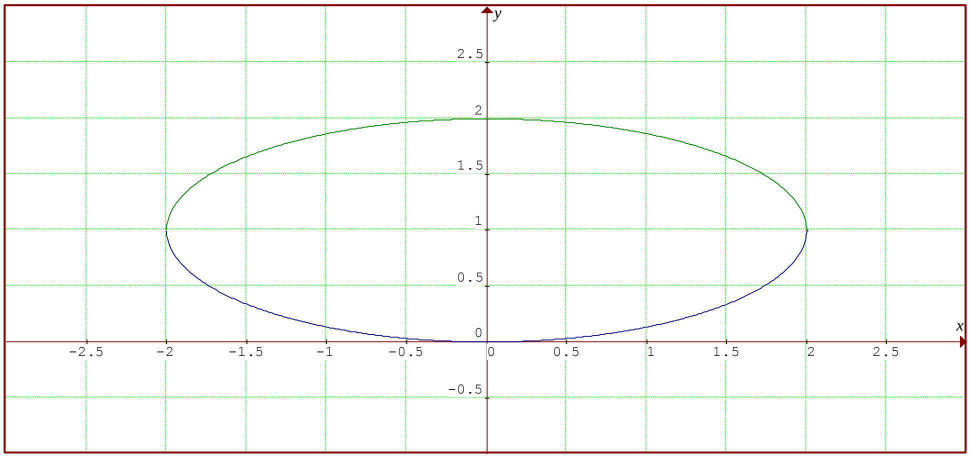
$$x^2+k\left(y-\frac{4}{k}\right)^2=\frac{16}{k} \qquad \frac{x^2}{\frac{16}{k}}+\frac{\left(y-\frac{4}{k}\right)^2}{\frac{16}{k^2}}=1 \text{ Cónica con centro en } C\left(0;\frac{4}{k}\right)$$

Si k<0 : hipérbola de eje focal paralelo al eje y

Si k>0 : elipse (en particular si k=1 circunferencia de radio=4)

b) Si $k=4$: $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ Elipse con centro en $C(0;1)$ y eje focal // eje x

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$



4)

a) $x^2 + A(z-1)^2 = By$ Paraboloide de revolución $A = 1$ y $B \neq 0$

Eje de giro paralelo al eje y

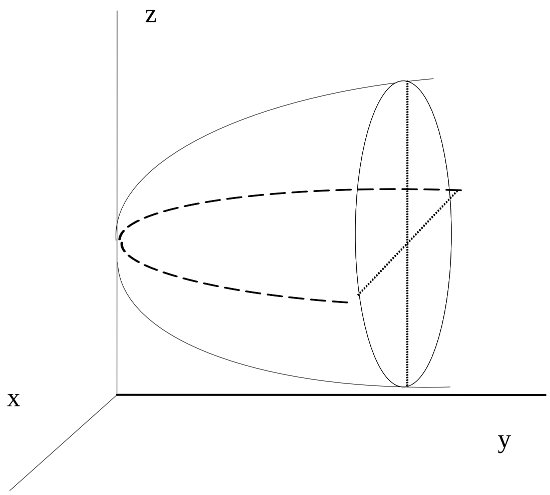
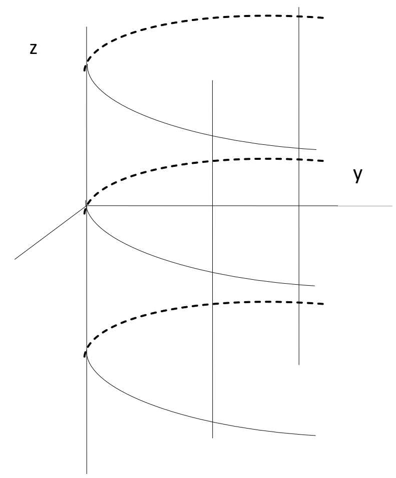


Gráfico Caso B>0

b) $x^2 + A(z-1)^2 = By$ Cilindro parabólico recto $A = 0$ y $B \neq 0$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 = 2B \end{cases} \quad B > 0 \quad r_1 : \begin{cases} x = \sqrt{2B} \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -\sqrt{2B} \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad \sqrt{2B} = 2 \Rightarrow B = 2$$

Cilindro parabólico recto $A = 0$ y $B = 2$ $\quad x^2 = 2y$



5) a) V

$$\left|A-\lambda^2 I\right| \underset{A^2=A}{=} \left|A^2-\lambda^2 I\right| = \left|(A-\lambda I)(A+\lambda I)\right| \underset{\text{prop det}}{=} \underbrace{\left|(A-\lambda I)\right|}_{0}\left|(A+\lambda I)\right| \underset{\lambda \text{ es autovalor de } A}{=}$$

$= 0\ \left|(A+\lambda I)\right| = 0$ por transitiva de la igualdad $\left|A-\lambda^2 I\right| = 0 \Rightarrow \lambda^2$ es autovalor de A

b)F , contraejemplo N_{2x2} el rango es cero, el orden es dos y es diagonalizable en cualquier base.

02-03-10 1er REC. PARCIAL B CURSO DE VERANO

1) Encuentre un endomorfismo $T: R^3 \to R^3 / T(X) = AX$ con $A \in R^{3x3}$ que cumpla con:

Todos los puntos del plano $\pi: \ x+y+z=0$ tengan por imagen un punto del plano $\alpha: x = z$

y la dimensión del núcleo sea igual a 1.

---

2) Sea $T: P_3 \to P_2 / T\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ una transformación lineal. Halle:

a) La matriz standard asociada a T.

b) Los conjuntos núcleo e imagen como combinación lineal de una base y sus dimensiones.

---

3) Dada la ecuación: $x^2 + ay^2 + by = c$ en R^2

a) Halle el valor de las constantes reales “a” , “b” y “c” tal que corresponda a una circunferencia con centro en (0;2) y que contenga al punto (1,1).

b) Para a = c = -1, analice e identifique la curva.

---

4) Sea la curva $\mathcal{C}$ definida en forma paramétrica por: $\mathcal{C}: (x;y) = \left(3-t^2\ ;\ 1+t\right) \ \wedge -1 \le t \le 2$

Grafique e identifique la curva.

---

5) Dada la ecuación: $x^2 - y^2 + z^2 = A$ en R^3.

a) Identifique mediante sus trazas para los distintos valores de la constante A.

b) En un mismo gráfico represente las superficies que se obtienen para A = -1, A = 1 y A = 0.

RESOLUCIÓN FECHA 02-03-10

1) Una solución puede ser:

$$B_\pi = \{(1,0,-1);(0,1,-1)\} \quad ; \quad B_\alpha = \{(1,1,1),(0,1,0)\} \wedge B_{Nu} = \{(0,0,1)\}$$
$$T: R^3 \to R^3 / T(1,0,-1) = (1,1,1) \wedge T(0,1,-1) = (0,1,0) \wedge T(0,0,1) = (0,0,0)$$

2) a)

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 1 \\ T(x^2) = 2x \\ T(x^3) = 3x^2 \end{cases} : \boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

b)

$$rg(A) = 3 = \dim Im(T) \therefore Im(T) = P_2 \; ; \; B_{Im} = \{1; x; x^2\}$$
$$\dim Nu(T) + \dim Im(T) = \dim(P_3) \Rightarrow \dim Nu(T) = 1$$
$$Nu(T): \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \therefore$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Nu(T) = \{\forall p(x) \in P_3 / p(x) = a \wedge a \in R\} \; ; \; \dim Nu(T) = 1; \; B_{Nu} = \{1\} \\ Im(T) = P_2 \; ; \; \dim Im T) = 3; \; B_{Im} = \{1:; x; x^2\} \end{array}}$$

3)a)

$$\text{Circunf} \quad \therefore a = 1: \quad x^2 + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = c + \frac{b^2}{4}$$
$$x^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4} \; ; \text{Centro } (0;2) \Rightarrow -\frac{b}{2} = 2 \therefore b = -4$$
$$x^2 + (y-2)^2 = c + 4 \; ; \; (1;1) \in C \Rightarrow 2 = c + 4 \therefore c = -2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 1 \wedge b = -4 \wedge c = -2 \\ x^2 + (y-2)^2 = 2 \end{array}}$$

b)

$$x^2 - y^2 + by = -1$$

$$x^2 - \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4}\right) = -1 + \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = -1 + \frac{b^2}{4}$$

Si $-1 + \dfrac{b^2}{4} \neq 0$ hipérbola con centro en $\left(0; \dfrac{b}{2}\right)$

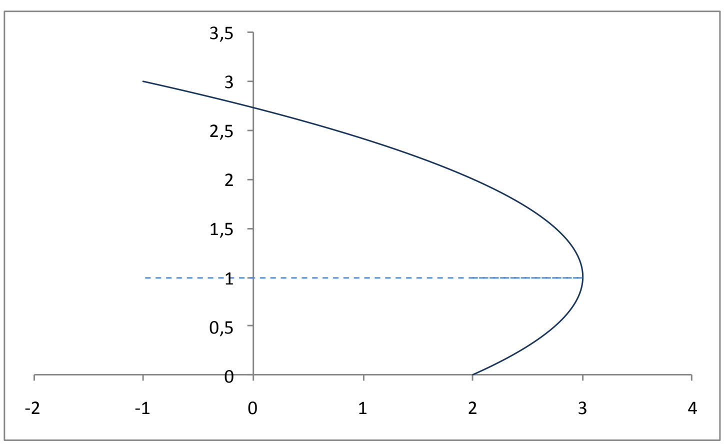
Si $-1 + \dfrac{b^2}{4} = 0$ dos rectas concurrentes en $\left(0; \dfrac{b}{2}\right)$ asíntotas de las hipérbolas anteriores

$b = -2 \vee b = 2: \quad L_1 : x - \left(y - \frac{b}{2}\right) = 0 \; ; \; L_2 : x + \left(y - \frac{b}{2}\right) = 0$
$-2 < b < 2:$ Hipérbolas de eje focal eje x
$b < -2 \vee b > 2$ Hipérbolas de eje focal paralelo al eje y

4)

$$\begin{cases} x = 3 - t^2 \\ y = 1 + t \end{cases} \wedge -1 \leq t \leq 2 \begin{cases} t = y - 1 \\ x = 3 - (y-1)^2 \end{cases} \wedge -1 \leq t \leq 2$$

$(y-1)^2 = -(x-3) \wedge 0 \leq y \leq 3$ Parábola con vértice en V(3;1) y eje focal y=1



5)a)

A<0 : Hiperbolide de dos hojas de revolución de eje y

A>0: Hiperbolide de una hoja de revolución de eje y

A=0: Cono asintótico de los hiperboloides.

04-03-10 2do REC. PARCIAL B CURSO DE VERANO

1) Construya un endomorfismo T de R^4 que cumpla con:

$$Nu(T) = Im(T) = S \wedge S \subset W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 / \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \right\}$$

2) Sea $T : R^2 \to R^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (matriz standard asociada a T)

a) Encuentre una base para la cual la matriz A resulte diagonal.

b) Grafique un cuadrado unitario con un vértice en el origen y los lados con direcciones coincidentes con la base anterior y grafique su transformado.

3) Dada la ecuación: $x^2 + 2y^2 - 6x - 12y = 0$ en R^2

a) Identifique y grafique el lugar geométrico.

b) Dé una forma paramétrica e indique la trayectoria en el gráfico anterior.

4) Analice la siguiente ecuación: $x^2 + Ay^2 = 2x$, identifique y grafique para A=0 y A<0 en:

a) R^2

b) R^3

5) Indique V o F, demuestre o dé un contraejemplo según corresponda:

Si $F : V \to W / Y = F(X)$ es una transformación lineal:

a) Si $\{ F(X_1), F(X_2) \}$ es l. independiente entonces $\{ X_1 , X_2 \}$ es l. independiente.

b) Si $\dim V < \dim W$ entonces T no es sobreyectiva.

RESOLUCIÓN FECHA 04-03-2010

1) Un endomorfismo puede ser:

Como $Nu(T) = Im(T) = S \wedge \dim Nu(T) + \dim Im(T) = 4 \Rightarrow \dim S = 2$

$S \subset W = \{(x_1, x_2, x_3, x_2) \in R^4 / x_4 = -(x_1 + x_2 + x_3)\}$; $B_W = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$

Una base de S puede ser : $B_S = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,-1)\}$ Base del núcleo y de la imagen

$$T : R^4 \to R^4 / \begin{cases} T(1,0,0,-1) = (0,0,0,0) \\ T(0,1,0,-1) = (0,0,0,0) \\ T(0,0,1,0) = (1,0,0,-1) \\ T(0,0,0,1) = (0,1,0,-1) \end{cases} \therefore \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) **a)**

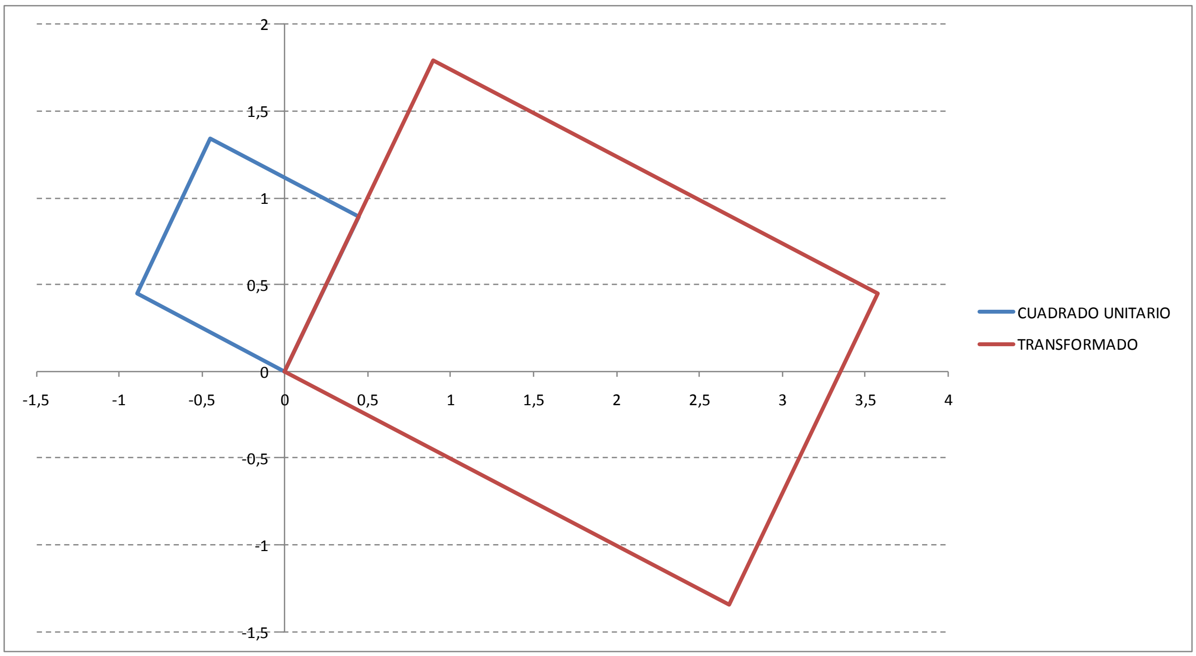
$\lambda^2+\lambda-6=0$ Ecuación característica; $\lambda_1=2$; $\lambda_2=-3$ autovalores

Si $\lambda_1=2: -2x+y=0 \quad \therefore y=2x \qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Si $\lambda_2=-3: x+2y=0 \quad \therefore x=-2y \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$B=\{(1,2),(-2,1)\}$ Base de autovectores $\qquad D=A_{BB}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}$

b)

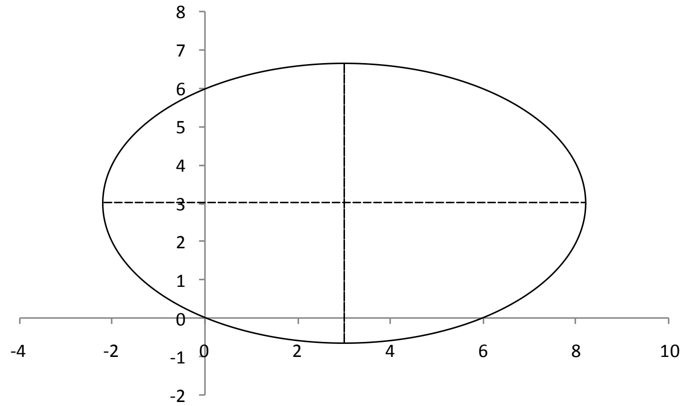


3) **a)**

$(x^2-6x+9)+2(y^2-6y+9)=27$

$$\frac{(x-3)^2}{27}+\frac{(y-3)^2}{\frac{27}{2}}=1$$

Elipse con centro en C(3,3) eje focal paralelo al eje x



b) $$\boxed{(x,y)=(3,3)+\left(3\sqrt{3}\cos t\ ,\ 3\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{sen} t\right)\quad 0\le t\le 2\pi}$$

4) Analice la siguiente ecuación: $x^2 + Ay^2 = 2x$, identifique y grafique para A=0 y A<0 en:

a) A=0

$x^2 = 2x\ :\ x=0\ ;\ x=2$ dos rectas paralelas al eje y

A<0

$(x-1)^2 + Ay^2 = 1$ hipérbola con centro en (1,0) y eje focal eje x

b) A=0

$x^2 = 2x\ :\ x=0\ ;\ x=2$ dos planos paralelos al plano yz

A<0

$$(x-1)^2 + Ay^2 = 1 \text{ cilindro hiperbólico}$$

5) a) Verdadero

$$\begin{aligned}\alpha X_1 + \beta X_2 &= O_V \qquad (1)\\ F(\alpha(X_1)+\beta X_2) &= F(O_V)\\ \alpha F(X_1)+\beta F X_2 &= O_W\end{aligned}$$

Como $\{\ F(X_1),\ F(X_2)\ \}$ es L.I. entonces $\alpha=\beta=0$ única solución

Por lo tanto de (1) $\{X_1, X_2\}$ L.I.

b) Verdadero

$\dim V < \dim W \wedge \dim Nu(T) + \dim Im(T) = \text{din} V \Rightarrow \dim Nu(T) + \dim Im(T) < \dim W$

$\dim Im(T) < \dim W\ \therefore T$ no sobreyectiva