APÉNDICE
NÚMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCIÓN

Ecuaciones como $x^2 + 9 = 0$ (i)
$x^2 + 4x + 5 = 0$ (ii)

No tienen solución en $\Re$:
(i') : $x^2 = -9$
(ii') : $(x+2)^2 = -1$
pues: $\forall a: a \in \Re \implies a^2 \in \Re_0^+$
Definimos el número imaginario *i* de modo que: $i^2 = -1$
y esto nos permite resolver las ecuaciones anteriores:

(i) Luego las soluciones son: $x = 3i \vee x = -3i$
(ii) $x = -2 + i \vee x = -2 - i$

Definición: Un número complejo *z* es un par ordenado de números reales (x, y)
donde *x* es la parte real $\mathcal{R}$ e *y* es la parte imaginaria $\mathcal{Im}$.

$$z = (x; y) = x + iy$$

$$\Re(z) = x \quad \text{Parte real de } z$$

$$\Im m(z) = y \quad \text{Parte imaginaria de } z$$

Además de la resolución de ecuaciones matemáticas como las anteriores, los números complejos tienen aplicaciones en Ciencias e Ingeniería: utilizamos números complejos en: modelos de circuitos eléctricos, análisis de vibraciones mecánicas de sistemas, teoría del calor, dinámica de fluidos, electrostática, descripción de ondas (especialmente en fenómenos de difracción e interferencia de ondas de luz), en mecánica cuántica la función de onda que describe objetos como los electrones necesita de los números complejos como parte esencial de esta descripción.

Podemos considerar a los números complejos como una extensión del conjunto de los números reales, y en este nuevo conjunto de números, el Teorema Fundamental del Álgebra establece que cualquier polinomio de grado *n* con coeficientes complejos (de los cuales algunos o todos pueden ser números reales) tiene *n* raíces (contando las raíces múltiples).
Calculemos las raíces de un polinomio p de coeficientes reales con MatLab[1]:

$$p(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4$$

Cargamos el vector p en MatLab incorporando solo los coeficientes, en potencias decrecientes y entre corchetes.
Luego la función *roots* calcula las raíces. Si pedimos la ayuda del programa *help roots*, obtenemos:

[1] MatLab opera en el campo complejo.

```
>> help roots
 roots   Find polynomial roots.
    roots(C) computes the roots of the polynomial whose coefficients
    are the elements of the vector C. If C has N+1 components,
    the polynomial is C(1)*X^N + ... + C(N)*X + C(N+1).
```

```
>> p=[1 -5 9 -9 8 -4];
>> raices_p=roots(p)

raices_p =

   0.0000 + 1.0000i
   0.0000 - 1.0000i
   2.0000 + 0.0000i
   2.0000 + 0.0000i
   1.0000 + 0.0000i
```

Las raíces de p son: $i\,, -i\ , 2\ (doble)\ y\ 1$

$$p(x) = (x^2 + 1)(x - 2)^2(x - 1) \quad \text{Forma factorial}$$

Encontremos las raíces de un polinomio q, para el cual algún coeficiente no es real:

$$q(t) = t^4 + (-1 - 3i)t^3 + (-4 + i)t^2 + 4i\,t + 2$$

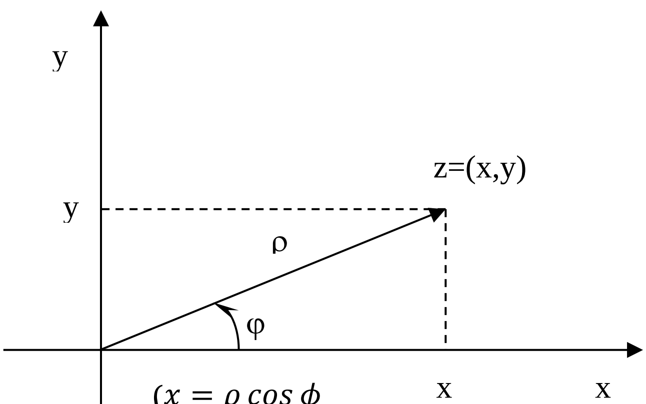
```
>> q=[1 -1-3i -4+i  4i 2];
>> raices_q=roots(q)

raices_q =

  -1.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 1.0000i
   1.0000 + 1.0000i
   1.0000 + 1.0000i
```

Las raíces de q son: $-1\ , i\ ,\ 1 + i\ \ (doble)$

$$q(t) = (t + 1)(t - i)[t - (1 + i)]^2 \quad \text{Forma factorial}$$

CONCEPTOS TEÓRICOS BÁSICOS:

Forma Polar o Trigonométrica de los números complejos:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho sen\phi \end{cases}$$

$$z = x + iy = \rho \cos \phi + i\rho sen\phi$$

$z = \rho(\cos\phi + isen\phi)$ Forma Polar

o también utilizando la notación abreviada: $z = \rho cis\phi$

Siendo:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{módulo o valor absoluto de z} \quad (\rho \geq 0)$$

$$\phi = arg(z) = arcsen\frac{y}{\rho} = arccos\frac{x}{\rho} = arctg\frac{y}{x} \qquad (z \neq 0)$$

Valor principal del argumento de z: $0 \leq \phi < 2\pi$

Forma Exponencial de los números complejos:

Se basa en la fórmula de Euler (la demostración no está al alcance de este curso)

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + isen\varphi$	**Fórmula de Euler**
$z = \rho e^{i\varphi}$	**Forma Exponencial**

Sean los números complejos:

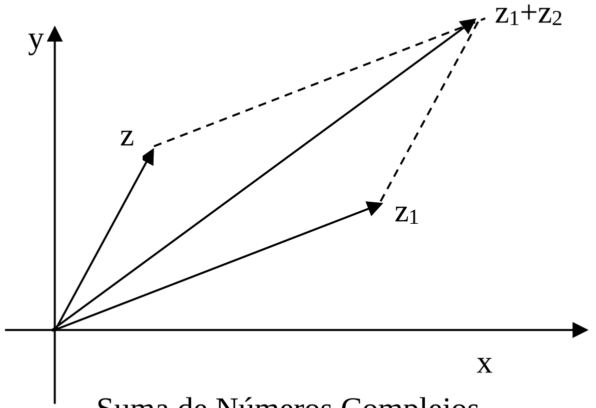
$$z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1[\cos(\phi_1) + isen(\phi_1)] = \rho_1 e^{i\phi_1}$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2[\cos(\phi_2) + isen(\phi_2)] = \rho_2 e^{i\phi_2}$$

Igualdad:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \phi_1 = \phi_2 + 2k\pi \wedge k \in Z$$

Suma:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



Suma de Números Complejos

Producto:

En forma binómica:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

En forma exponencial:

$$z_1 z_2 = (\rho_1 e^{i\phi_1})(\rho_2 e^{i\phi_2}) = (\rho_1\rho_2)(e^{i\phi_1}e^{i\phi_2}) = (\rho_1\rho_2)e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

En forma Polar:

$$z_1 z_2 = (\rho_1\rho_2)[\cos(\phi_1 + \phi_2) + isen(\phi_1 + \phi_2)]$$

Conjugado de un número complejo:

Sea z = x + iy , llamamos conjugado de z al número complejo $\overline{z} = x - iy$

Cociente:

Si $z_2 \neq 0$

En forma binómica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

En forma exponencial:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\phi_1}}{\rho_2 e^{i\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

En forma Polar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\,\phi_1 - \phi_2) + isen(\phi_1 - \phi_2)]$$

Potenciación:

$$z^n = \left(\rho e^{i\phi}\right)^n = \rho^n e^{in\phi}$$
$$z^n = \rho^n[cos(\,n\phi) + isen(n\phi)]$$

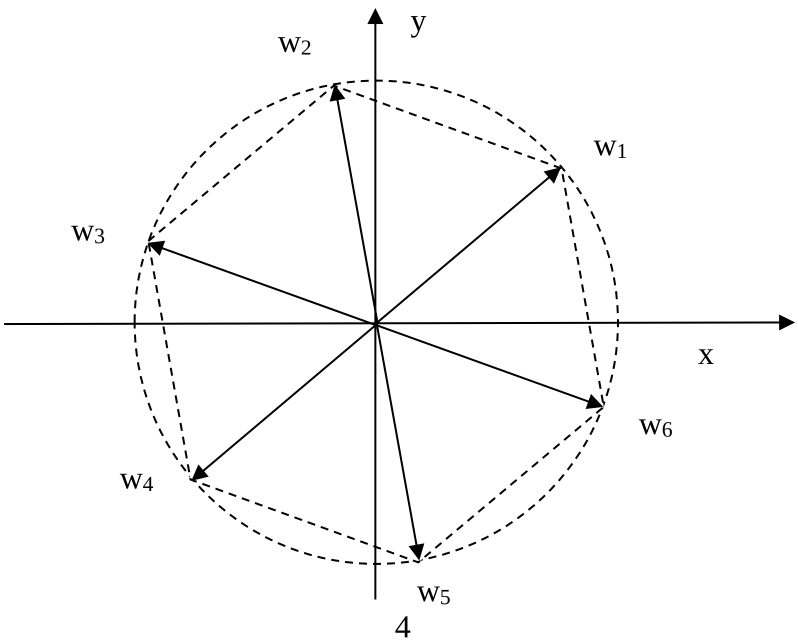
Radicación:

Si $w = re^{i\theta}$

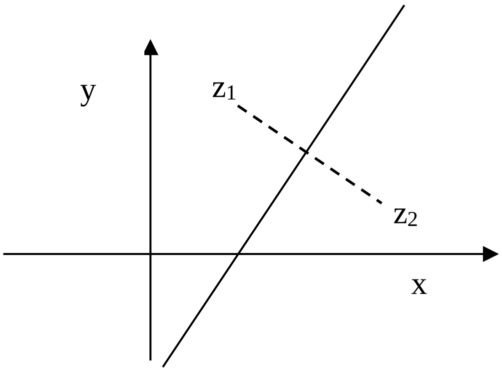
$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^n \Leftrightarrow \rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \Leftrightarrow \rho = r^n \wedge \phi + 2k\pi = n\theta \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \wedge \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi + 2k\pi}{n}} \wedge k = 0,1,\ldots,n-1$$
$$\sqrt[n]{z} = w_{k+1} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)\right] \wedge k = 0,1,\ldots,n-1$$

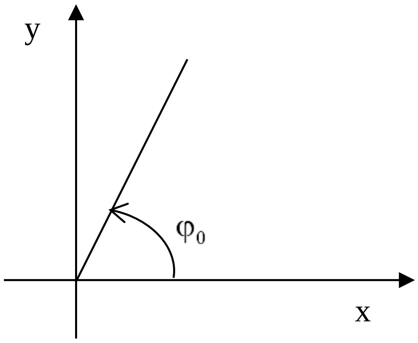
En la siguiente figurase muestran las raíces sextas de un complejo z



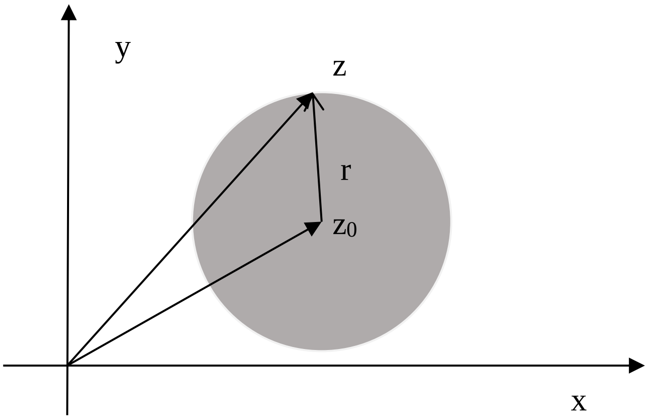
Curvas y regiones en el plano complejo:
Rectas que contienen al punto $z_0 = (x_0; y_0) = \rho_0 cis(\phi_0)$:
Paralela al eje real: $y = y_0$
Paralela al eje imaginario: $x = x_0$
Mediatriz del segmento $\overline{z_1 z_2}$: $|z - z_1| = |z - z_2|$



Semirrecta: $\phi = \phi_0$



Circunferencia con centro en z_0 y radio r: $|z - z_0| = r$
Círculo con centro en z_0 y radio r: $|z - z_0| \le r$



Elipse con focos en $z_1 y z_2$ y diámetro mayor "2a", siendo $2a > |\overrightarrow{z_1 z_2}|$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

Matrices

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Si calculamos sus autovalores resulta:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

El polinomio característico es: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ y sus raíces: $\lambda_1 = 1 + i$; $\lambda_2 = 1 - i$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 1:

Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 3 - 4i z_2 = 1 + i z_3 = 5 - 4i$$

Realice los siguientes cálculos:

1.1) $z_1 \overline{z_2}$

1.2) $\Im m(z_2) z_3 + |z_1|$

1.3) $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2}$

1.4) $\dfrac{\Re(z_1 + z_2)}{(z_1 + z_2)}$

1.5) $(\overline{z_2 + z_3}) {z_1}^2$

1.6) $\overline{\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)} |z_1|^2$

1.7) $\Re({z_1}^2) + 2\Re(z_1) + 1$

1.8) ${z_2}^3 + i{z_2}^2 - 2z_2$

Ejercicio 2:

Complete el siguiente cuadro según corresponda y represente en el plano complejo:

BINÓMICA	POLAR	EXPONENCIAL
$-2 + 2i$		
	$3cis(5\pi/3)$	
		$5e^{\pi i}$
$-4i$		
		e^{π}
	$\sqrt{2}cis(5\pi/4)$	
	$cis(n\pi) \wedge n \in Z$	
		$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 3:

Complete el siguiente cuadro e interprete geométricamente los resultados obtenidos en la sexta columna:

z	$\|z\|$	$arg(z)$	z^4	z^6	$\sqrt[4]{z}$
$3i$					
$2 + 2i$					
-5					
$-\sqrt{3}i - 1$					

Ejercicio 4:

Utilice: $(cos\,\theta + isen\theta)^n = cos(\,n\theta) + isen(n\theta)$ (de Moivre) para probar:

4.1) $\boldsymbol{cos}(3\theta) = 4\,\boldsymbol{cos}^3\,\theta - 3\,\boldsymbol{cos}\,\theta$ 4.2)$sen(3\theta) = -4sen^3\theta + 3sen\theta$

Ejercicio 5:

Resuelva las siguientes ecuaciones y grafique el conjunto solución:

5.1) $cos\,x + isenx \rightleftarrows= senx + i\,cos\,x \wedge x \in R$

5.2)$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$

5.3)$z^4 + 4z^3i - 6z^2 - 4zi - 15 = 0$

Ejercicio 6:

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y obtenga la matriz P , matriz de autovectores y su inversa, P^{-1} que nos permite diagonalizar la matriz, obtenga la matriz diagonal semejante a la matriz A.

Ejercicio 7:

Determine, en cada una de las siguientes ecuaciones o desigualdades, el conjunto de puntos del plano complejo que satisface cada una de ellas. Grafique tal conjunto.

7.1)$|z - 8 + 4i| = 9$

7.2)$|z| = |z - i|$

7.3)$|z|^2 + \Im m(z) = 16$

7.4)$|z - 2i| + |z| = 6$

7.5)$\Im m(z - i) = \Re(z + 1)$

7.6)$|z + 2 + i| > |z - 1|$

7.7)$-1 \leq \Re(z) < 2$

7.8)$|z + i| > |z| \quad \wedge \quad |z| < 1$

7.9)$|z - 2i| \leq |z + 2 - i| \quad \wedge \quad |z| > 1$

7.10)$|z - 4i| - |z| = 2$

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1.1)$-1 - 7i$

1.2)$10 - 4i$

1.3)$1 - i$

1.4)$\frac{16}{25} + \frac{12}{25}i$

1.5)$30 - 165i$

1.6)$31 - 8i$

1.7)0

1.8)-6

Ejercicio 2:

$-2+2i$	$2\sqrt{2}cis(3\pi/4)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$
$\frac{3}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$3cis(5\pi/3)$	$3e^{i\frac{5}{3}\pi}$
-5	$5cis(\pi)$	$5e^{i\pi}$
$-4i$	$4cis(3\pi/2)$	$4e^{i\frac{3}{2}\pi}$
e^{π}	e^{π}	e^{π}
$-1-i$	$\sqrt{2}cis(5\pi/4)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$
$(-1)^n$	$cis(n\pi) \wedge n \in Z$	$e^{in\pi}$
$-i$	$cis(3\pi/2)$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 3:

z	$\lvert z\rvert$	$arg(z)$	z^4	z^6	$\sqrt[4]{z}$
$3i$	3	$\frac{\pi}{2}$	81	-729	$\sqrt[4]{3}cis\left[\frac{\pi}{8}(4k+1)\right] \wedge k = 0;1;2;3$
$2+2i$	$2\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-64	-512 i	$\sqrt[8]{8}cis\left[\frac{\pi}{16}(8k+1)\right] \wedge k = 0;1;2;3$
-5	5	π	625	15625	$\sqrt[4]{5}cis\left[\frac{\pi}{4}(2k+1)\right] \wedge k = 0;1;2;3$
$-\sqrt{3}i-1$	2	$\frac{4}{3}\pi$	$-8(1+\sqrt{3}\,i)$	64	$\sqrt[4]{2}cis\left[\frac{\pi}{6}(3k+2)\right] \wedge k = 0;1;2;3$

Ejercicio 5:

$$5.1) x = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge k \in Z$$

$$5.2) z_{k+1} = 1 + 2cis\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \wedge k = 0;1;2 \therefore z_1 = 2+\sqrt{3}i; z_2 = -1; z_3 = 2-\sqrt{3}i$$

$$5.3) z_{k+1} = -i + 2cis\left(\frac{k}{2}\pi\right) \wedge k = 0;1;2;3 \therefore z_1 = 2-i; z_2 = i; z_3 = -2-i; z_4 = -3i$$

Ejercicio 6:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7:

7.1) $|z-(8-4i)| = 9$ Lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto (8;-4) es igual a 9. Circunferencia con centro en $8-4i$ y radio 9.
O también: $S_1 = \{(x;y) \in \mathrm{C} / (x-8)^2 + (y+4)^2 = 81\}$

7.2) $|z-(0;0)| = |z-(0;1)|$ Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del origen y de A(0;1), la mediatriz del segmento $\overline{OA}$. O también: $S_2 = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/y = \frac{1}{2}\right\}$ Recta paralela al eje real.

7.3) $S_3 = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/x^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{65}{4}\right\}$ Circunferencia con centro en $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

7.4) Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos (0;2) y al origen (focos) es igual a 6 (2a = 6).

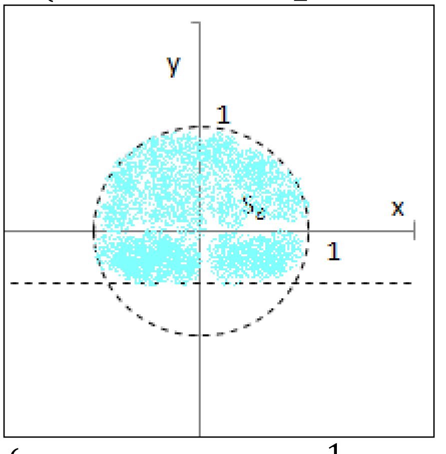
$S_4 = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/\frac{x^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\right\}$ Elipse con centro en (0;1) eje focal eje y; a = 3; $b = 2\sqrt{2}$ y c = 1.

$$7.5)\ S_5 = \{(x;y) \in \mathrm{C}/y = x+2\}$$

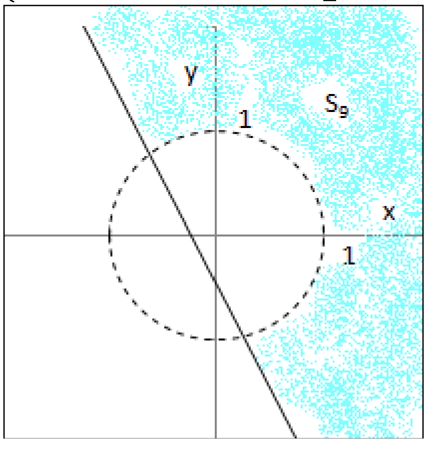
7.6) $S_6 = \{(x;y) \in \mathrm{C}/y > -3x-2\}$ Semiplano.

7.7) $S_7 = \{(x;y) \in \mathrm{C}/-1 \leq x < 2\}$ Franja paralela al eje y.

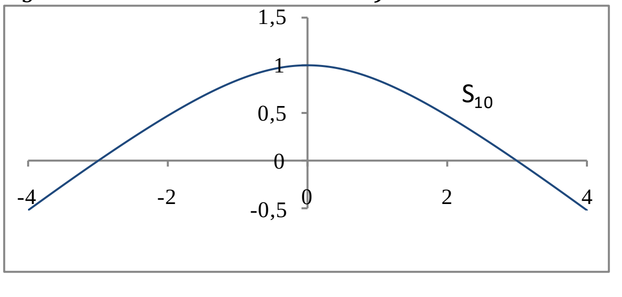
$$7.8)\ S_8 = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/y > -\frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 < 1\right\}$$



$$7.9)\ S_9 = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/y \geq -2x - \frac{1}{2} \wedge x^2 + y^2 > 1\right\}$$



7.10) $S_{10} = \left\{(x;y) \in \mathrm{C}/-\frac{x^2}{3} + (y-2)^2 = 1 \wedge y \leq 1\right\}$ Rama inferior de una hipérbola



Resolución con wxMaxima

Las operaciones con números complejos son análogas a las de los números reales Las siguientes funciones de Maxima son propias del campo complejo.

Las funciones se escriben en minúsculas y los argumentos entre paréntesis.

Nombre	Devuelve	$z = 1 - i$ (%i1) z:1-%i$
cabs	Módulo	(%i2) cabs(z); (%o2) $\sqrt{2}$
carg	Argumento en radianes	(%i3) carg(z); (%o3) $-\frac{\pi}{4}$
conjugate	Conjugado	(%i4) conjugate(z); (%o4) $\%i+1$
imagpart	Parte imaginaria	(%i5) imagpart(z); (%o5) -1
realpart	Parte real	(%i6) realpart(z); (%o6) 1
polarform	Forma exponencial	(%i7) polarform(z); (%o7) $\sqrt{2}\,\%e^{-\frac{\%i\,\pi}{4}}$
rectform	Forma rectangular o binómica	(%i8) rectform(z); (%o8) $1-\%i$

Ejercicio 1

Cargamos los datos separados por comas en una lista que va entre corchetes, las asignaciones se hacen con dos puntos (:), al final de la lista el signo pesos $ para que no muestre el %o1 (output)

```
(%i1) [z1:3-4*%i,z2:1+%i,z3:5-4*%i]$
```

Construimos otra lista con los cálculos y le aplicamos *rectform*

```
(%i2) rectform([z1*conjugate(z2),imagpart(z2)*z3+cabs(z1),
      (z3-z1)/z2,realpart(z1+z2)/(z1+z2),conjugate(z2+z3)*z1^2,
      conjugate(z3/z1)*(cabs(z1))^2,
      realpart(z1^2)+2*realpart(z1)+1,z2^3+%i*z2^2-2*z2]);
```

(%o2) $[-7\,\%i-1,\,10-4\,\%i,\,1-\%i,\,\frac{12\,\%i}{25}+\frac{16}{25},\,30-165\,\%i,\,31-8\,\%i,\,0,\,-6]$

Ejercicio 3

z	|z|	arg(z)
(%i1) z31:3*%i$	(%i2) cabs(z31); (%o2) 3	(%i3) carg(z31); (%o3) $\frac{\pi}{2}$
(%i1) z32:2+2*%i$	(%i2) cabs(z32); (%o2) $2^{3/2}$	(%i3) carg(z32); (%o3) $\frac{\pi}{4}$
(%i1) z33:-5$	(%i2) cabs(z33); (%o2) 5	(%i3) carg(z33); (%o3) π
(%i1) z34:-sqrt(3)*%i-1$	(%i2) cabs(z34); (%o2) 2	(%i3) carg(z34); (%o3) $-\frac{2\pi}{3}$

z^4	z^6	$\sqrt[4]{z}$
(%i4) z31^4; (%o4) 81	(%i5) z31^6; (%o5) -729	(%i6) polarform(z31^(1/4)); (%o6) $3^{1/4}\,\%e^{\frac{\%i\,\pi}{8}}$
(%i4) rectform(z32^4); (%o4) -64	(%i5) rectform(z32^6); (%o5) $-512\,\%i$	(%i6) polarform(z32^(1/4)); (%o6) $2^{3/8}\,\%e^{\frac{\%i\,\pi}{16}}$
(%i4) z33^4; (%o4) 625	(%i5) z33^6; (%o5) 15625	(%i6) polarform(z33^(1/4)); (%o6) $5^{1/4}\,\%e^{\frac{\%i\,\pi}{4}}$
(%i4) rectform(z34^4); (%o4) $-8\sqrt{3}\,\%i-8$	(%i5) rectform(z34^6); (%o5) 64	(%i6) polarform(z34^(1/4)); (%o6) $2^{1/4}\,\%e^{-\frac{\%i\,\pi}{6}}$

Maxima solo calcula una raíz enésima, para obtener las restantes debemos recordar que todas tienen el mismo módulo y los argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$. En este caso como se trata de raíces cuartas debemos sumar al *argumento* $\frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$ y $k = 1, 2, 3$

Ejercicio 4

```
(%i1) [z:cos(3*t)+%i*sin(3*t),z4:z^3]$
```

4.1)

```
(%i2) cos(3*t)=realpart(z4);
```

(%o2) $\cos(3\,t)=\cos(3\,t)^3-3\cos(3\,t)\sin(3\,t)^2$

4.2)

```
(%i3) sin(3*t)=imagpart(z4);
```

(%o3) $\sin(3\,t)=3\cos(3\,t)^2\sin(3\,t)-\sin(3\,t)^3$

Ejercicio 5

5.2)

```
(%i1) solve([z^3-3*z^2+3*z+7=0], [z]);
```

(%o1) $[z=2-\sqrt{3}\,\%i, z=\sqrt{3}\,\%i+2, z=-1]$

5.3)

```
(%i2) solve([z^4+4*z^3*%i-6*z^2-4*z*%i-15=0], [z]);
```

(%o2) $[z=-3\,\%i, z=\%i, z=-\%i-2, z=2-\%i]$

Ejercicio 6

```
(%i1) A:matrix([1,1],[-1,1])$
(%i2) eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[1-\%i,\%i+1],[1,1]],[[[1,-\%i]],[[1,\%i]]]]$

En la primera lista salen los autovalores, en la segunda la multiplicidad de cada uno respectivamente y en la tercera los autovectores, que ubicados en columnas constituyen la matriz de cambio de base.

```
(%i3) D:matrix([1-%i,0],[0,%i+1]);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 1-\%i & 0 \\ 0 & \%i+1 \end{bmatrix}$$

```
(%i4) P: matrix([1,1],[-%i,%i]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\%i & \%i \end{bmatrix}$$

```
(%i5) P_inversa:invert(P);
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\%i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\%i}{2} \end{bmatrix}$$

Con MatLab, la matriz de cambio de base la normaliza.

```
>> A=[1 1;-1 1];
>> [P,D]=eig(A)

P =

   0.7071 + 0.0000i   0.7071 + 0.0000i
   0.0000 + 0.7071i   0.0000 - 0.7071i


D =

   1.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 1.0000i

P_inversa =

   0.7071 + 0.0000i   0.0000 - 0.7071i
   0.7071 + 0.0000i   0.0000 + 0.7071i

>> P_inversa*A*P

ans =

   1.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   1.0000 - 1.0000i
```