# Examen Final de Álgebra y Geometría Analítica

9 de febrero de 2021

**Ejercicio.** Hallar el valor real de $h$ para que las rectas $R$ y $S$ sean coplanares, siendo

$$R : (0, 2, 1) + \lambda(3, -1, h),\ \lambda \in \mathbb{R};$$

$$S : \begin{cases} x - y + z = -2, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

**Respuesta:** $h = -\frac{7}{2}$

**Ejercicio.** Sean los subespacios

$$S = gen\{(1, 2, 3), (-1, 0, 1), (0, 2, 4)\},$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y = 0 \land x = z\}.$$

Seleccionar cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $S^{\perp} = gen\{(-1, 2, -1)\}$. ✓
2. $\dim(S^{\perp} + W) = 2$.
3. $S \cap W = \emptyset$.
4. $(\alpha \cap \beta) \subseteq W$, siendo $\alpha : x - z = 0 \land \beta : -3x - y + z = 0$. ✓

**Ejercicio.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ la transformación lineal tal que

$$M_{BE}(T) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $B = \{(1,1,1),(0,0,1),(0,-1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $E$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Seleccionar cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. $T$ es un monomorfismo (inyectiva) para todo $a \in \mathbb{R}$. ✓
2. Existe $a \in \mathbb{R}$ para el cual $T$ es un epimorfismo (suryectiva).
3. $T(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ✓
4. Para $a = 1$, $T(1,0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio.** Dada

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & k & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

seleccionar cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. Existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual $\lambda = 5$ es autovalor de $M$ con multiplicidad algebraica 2. ✓
2. Existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual $rg(M) = 2$. ✓
3. Si $k = 0$, entonces $M$ no es diagonalizable.
4. El sistema lineal $MX = 0$ es compatible determinado para todo $k \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio.** Dada la superficie de ecuación

$$-px^2 + 4y^2 + qz^2 = 16,$$

obtener los valores reales de $p$ y $q$ tales que la traza con el plano $xz$ es una hipérbola cuyos semiejes tienen longitud 1 y 2, y la traza con el plano $xy$ es una circunferencia de diámetro 4.
**Respuesta:** $p = -4$, $q = -16$.