Algebra y Geometría Analítica - EXAMEN FINAL - 23/05/2023 TEMA 1

1	2	3	4	5	Nota

Nombre y Apellido: .....

Condición mínima de aprobación (6 puntos): 3 problemas correctamente resueltos. Todas las respuestas deben estar debidamente ***justificadas****.*

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $Nu(f) = \text{gen}\{(1, -1, 2)\}$ y para todos los vectores cuyas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfacen la ecuación

$$x + 2y + z = 0$$

se verifica que

$$f(x, y, z) = -2(x, y, z)$$

   a) Determinar la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ ($M_{EE}(f)$).

   b) Determinar si existe una base ordenada B de $\mathbb{R}^3$ para la cual $M_{BB}(f)$ es diagonal.

---

2. Determinar todos los valores reales de a y b para los cuales la recta $\mathbb{L}$ de ecuación

$$(x, y, z) = \lambda(a + 3,\ a + 1,\ a + b) + (b + 1,\ 4,\ 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

es paralela al plano de ecuación $-x - 2y + 2z = 1$ y además su distancia a dicho plano es igual 4.

---

3. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justificar adecuadamente**.

   a) El conjunto $A = \{(1,\ 3,\ k), (1,\ 1,\ k + 2), (k,\ 4k + 1,\ k^2 + 1)$ es una base de $\mathbb{R}^3$ cualquiera sea el valor real de k.

   b) Si $\mathbb{S}_1 \bigoplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^3$, entonces $\mathbb{S}_1$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{S}_2$.

---

4. *a*) Sea $S = \{z \in \mathbb{C} / \ 2|z|^2 - z\,\overline{z} + (\Re e(z))^2 + 2\,\Re e(z^2) \leq 4\}$ y T el conjunto de números complejos de módulo 3. Graficar $S \cap T$.

   b) Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{A}$ los subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\mathbb{S}$ contiene a todas las matrices simétricas y $\mathbb{A}$ a las antisimétricas. Determinar si $\mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{S} + \mathbb{A}$.

---

5. La intersección de la superficie de ecuación $Ax^2 + y^2 - z^2 = 1$ con el plano $z = 2$ es una elipse con focos F_1 y F_2 sobre una recta paralela al eje x y tal que la distancia focal es igual a 4.

   a) Encontrar A y graficar la superficie.

   b) Dar una parametrización de dicha elipse.