

**GUÍA COMPLEMENTARIA DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA****EJERCICIOS DE RECTA Y PLANO**

1) Sean las rectas  $L_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - ky = 4 \end{cases}$ ,  $L_2 : \frac{x-1}{2} = y + 2 = z$

a) Halle  $k \in \mathbb{R}$ , si existe, tal que  $L_1$  sea paralela al vector  $\vec{v} = (1,1,0)$ .

b) Para  $k = -1$ , determine si  $L_1$  y  $L_2$  son coplanares o alabeadas, y halle la ecuación del plano que las contiene y/o la distancia entre ellas, según corresponda.

**Rta.:** a) No existe  $k$     b) Son alabeadas,  $\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{11}{\sqrt{35}}$

2) Calcule la distancia de la recta  $L_1 : (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda (1, 1, 1)$  al plano  $\pi$  que contiene al eje "z" y que es paralelo a la recta  $L_1$ . Grafique el plano.

**Rta.:**  $x - y = 0$ ;  $\text{dist}(L_1, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) Dadas la recta  $r : (x, y, z) = (1 + t, kt, 2 - t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , y los puntos  $A(-3, 1, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$

a) Halle  $k \in \mathbb{R}$ , si existe, tal que  $B$  pertenezca a la recta  $r$ .

b) Para  $k = 2$ , halle la ecuación paramétrica del plano que pasa por  $A$  y contiene a la recta  $r$ .

**Rta.:** a) No existe  $k$     b)  $\begin{cases} x = -3 + 4t_1 + t_2 \\ y = 1 - t_1 + 2t_2 \\ z = 2 - t_2 \end{cases}$ ;  $t_1 \in \mathbb{R} \wedge t_2 \in \mathbb{R}$

4) Sean las rectas :  $L_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 \\ z = -\lambda \end{cases}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$      $L_2 : x + 2 = -y = -(z - 1)$

a) Determine si son alabeadas.

b) Calcule la distancia entre ellas o su intersección, según corresponda

**Rta.:** a) Son alabeadas    b)  $\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

5) Sean las rectas :  $r_1 : x + 1 = y + 2 = \frac{z}{3}$  ;  $r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$      $\lambda \in \mathbb{R}$

Obtenga las ecuaciones de todos los planos  $\pi$  que cumplen con las siguientes condiciones:

$$\pi \perp r_1 \text{ y } \text{distancia}(\pi, r_2) = \sqrt{11}$$

**Rta.:**  $\pi_1 : x + y + 3z + 1 = 0$  ;  $\pi_2 : x + y + 3z - 21 = 0$

6) Sean:  $r : \begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ x + tz + h = 0 \end{cases}$     y     $\pi : x + y + z + 1 = 0$

Determine los valores de  $t$  y  $h \in \mathbb{R}$  para los cuales  $r \subset \pi$

**Rta.:**  $t = \frac{1}{2} \wedge h = 1$

7) Sean: la recta  $r : (x, y, z) = (1 + \lambda, -1 - 2\lambda, 2 + k\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

y el plano  $\pi : (x, y, z) = (\alpha + \beta, 1 - \beta, 2 + \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta \in \mathbb{R}$

- a) Halle el valor de “k” para que la recta “r” sea paralela al plano  $\pi$ .  
 b) Para el valor de “k” hallado, calcule la distancia entre la recta y el plano.

**Rta.:** a)  $k = -1$  b)  $\text{dist}(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

8) Dadas las rectas:  $L_1 : \frac{x-1}{-1} = y-2 = z$ ;  $L_2 : \begin{cases} x = 1 - 2\beta \\ y = 3 + \beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

- a) Demuestre que se cortan en un único punto, y calcule las coordenadas de dicho punto.  
 b) Halle la proyección del punto  $A(1,1,0)$  sobre el plano que determinan las rectas  $L_1$  y  $L_2$ .

**Rta.:** a)  $I(-1,4,2)$  b)  $\pi : y - z - 2 = 0$ ;  $A\left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

9) Sea la recta  $r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - kz = 0 \end{cases}$

- a) Halle todos los  $k \in \mathbb{R}$  tales que la distancia de la recta al origen de coordenadas sea  $d = 1$   
 b) Grafique ambos planos y la recta intersección cuando  $k = 1$

**Rta.:** a)  $k = -1$  b)  $r : (x, y, z) = (t, 1 - 2t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

10) Sean los planos:  $\pi_1 : x + y - 2z - k = 0$ ;  $\pi_2 : x + y = 1$ .

- a) Halle  $k \in \mathbb{R}$ , si existe, tal que la recta que determinan ambos planos esté incluida en el plano coordenado  $z = 0$   
 b) Para  $k = 2$ , grafique ambos planos utilizando sus trazas, y la recta intersección entre ambos planos.

**Rta.:** a)  $k = 1$  b)  $r : (x, y, z) = \left(t, 1 - t, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

11) Dado el plano  $\pi : (x; y; z) = (1; 0; 5) + t_1(1; 1; -1) + t_2(1; 0; 1)$  y el haz de planos

$\alpha_i : (y - z) + k(x - z - 1) = 0$ , halle un plano perteneciente al haz que sea perpendicular a  $\pi$ .

**Rta:**  $x + 2y - 3z - 1 = 0$

12) Sean  $L_1 : \begin{cases} 2x - 4y + z + 1 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$  y  $L_2 : \frac{x-1}{a} = \frac{y+2}{4} = z$

- a) Halle “a” para que  $L_1$  y  $L_2$  sean coplanares.  
 b) Encuentre todos los puntos P pertenecientes al eje “y” tal que la distancia al plano que contiene a  $L_1$  y  $L_2$  sea igual a  $\sqrt{41}$

**Rta:** a)  $a = 2$  b)  $P_1(0; -23; 0)$   $P_2(0; 18; 0)$

13) Dada la recta  $L : \begin{cases} y = 2x \\ z = 1 \end{cases}$  y el plano  $\alpha : x + y + z = 9$

- a) Halle la ecuación del plano  $\beta$ , que contiene a la recta L y es perpendicular al plano  $\alpha$ .  
 b) Halle la proyección de la recta L sobre el plano  $\alpha$ .

**Rta:** a)  $\beta : 2x - y - z + 1 = 0$  b)  $L' : (x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \lambda, \frac{19}{3} - \lambda\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

14) Halle los valores de las constantes “a” y “b”, tal que la proyección de la recta

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = 1+at \\ z = bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ sobre el plano } \pi : x+2z = 30 \text{ resulte un solo punto. Encuentre dicho punto.}$$

**Rta:**  $a = 0 \wedge b = -4 \quad P(6; 1; 12)$

15) Determine la ecuación de la recta que contiene al origen, es perpendicular a la recta

$$r : x = y-5 \wedge z = 2y-3 \text{ y corta a la recta } s : y = 2x+1 \wedge z = x+2$$

**Rta:**  $(x, y, z) = (t, t, -t); t \in \mathbb{R}$

16) Obtenga la ecuación de la recta que pasa por  $A(3, 6, 4)$ , corta al eje  $z$  y es paralela al plano  $\pi : x-3y+5z-6=0$ . Calcule la distancia de la recta al plano.

**Rta:**  $r : (x, y, z) = (3+t, 6+2t, 4+t) \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{dist}(r, \pi) = \frac{1}{\sqrt{35}}$

17) Halle la ecuación del plano que contiene a la recta  $s : \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con la

recta  $r : (x; y; z) = (-1; 0; 1)t \quad ; t \in \mathbb{R}$ , grafique la recta  $s$  y los planos. ¿Cuál es la posición relativa de  $s$  y  $r$ ? Justifique

**Rta:**  $\alpha_1 : x-y-1=0 \quad \alpha_2 : x+y-5=0 \quad \text{Alabeadas}$

18) Dada la recta  $L : x-2 = y-1 = \frac{-z-3}{2}$

a) Halle la proyección de  $L$  sobre el plano  $\pi : x+y+z=0$

b) Halle la ecuación del plano que contiene a  $L$  y a su proyección.

**Rta:** a) Es la recta  $L$ , ya que la recta  $L$  está contenida en el plano  $\pi$ .

b)  $(a+2b)x + (-a)y + bz + (-a-b) = 0$ , es un haz de planos que se construye con dos planos cualesquiera que contengan a la recta  $L$ .

19) Halle el punto contenido en la recta  $r : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = 2+2t \end{cases}$  cuya proyección sobre el plano "yz"

es  $(0; 1; -2)$ .

**Rta:**  $(3; 1; -2)$

20) Halle todos los puntos  $P$  del plano "xy" tal que la distancia al plano  $\alpha : 3y+4z-12=0$  es igual a 1. ¿Qué lugar geométrico representa el conjunto de todos los puntos  $P$ ? Grafique.

**Rta:**  $\begin{cases} y = \frac{17}{3} \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ z = 0 \end{cases}$  dos rectas paralelas al eje  $x$ .

### EJERCICIOS DE ESPACIO VECTORIAL

21) Justifique si la siguiente afirmación es V o F (Si es verdadera debe demostrarlo y si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

Sea el espacio vectorial  $(V; +; \mathbb{R}; \cdot)$

Si  $A = \left\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \right\} \subset V$  es l. indep. entonces  $B = \left\{ \vec{u} - 2\vec{w}, \vec{u} + \vec{v}, k\vec{w} - \vec{u} + \vec{v} \right\}$  es l. indep.

**Rta.:** Falso, si  $k = 4$ ,  $B$  no es linealmente independiente.

22) Dado el conjunto  $S = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y; z) \times (1; -1; 2) = (0; 0; 0) \}$

a) Dé la interpretación geométrica de  $S$ .

b) Analice si  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  y en caso afirmativo halle una base y su dimensión.

**Rta:** a) Es una recta que contiene al origen y es paralela al vector  $(1; -1; 2)$  b)  $S$  es un subespacio de dimensión uno donde  $\{(1; -1; 2)\}$  es una base.

Nota:  $\times$ : producto vectorial o cruz

23) Sean  $S$  y  $W$  subespacios vectoriales de  $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}; \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \lambda(a, b, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a) Obtenga, si existen,  $a, b \in \mathbb{R} / W \subset S$ . Interprete geoméricamente.

b) Verifique si para  $a = b = 1$ ,  $S \oplus W$  es suma directa, justifique su respuesta.

**Rta:** a)  $\forall a \in \mathbb{R} \wedge b = a + 1$ . La recta  $W$  esta incluida en el plano  $S$ . b) Para éste caso no se verifica la condición anterior por lo tanto la recta no está incluida en el plano, la intersección es el origen y la suma es directa.

24) Dado el conjunto  $B = \{kx^2 + k; x^2 - kx; x^2 + kx + 1\} \subset P_2$

a) Halle todos los valores reales de  $k$  para que  $B$  sea una base de  $P_2$ .

b) Para  $k = 1$  halle las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base  $B$ .

**Rta:** a)  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$     b)  $x^2_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad 1_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

25) Dado el conjunto  $A = \{x^2 + kx - 1; 2x^2 - 2x; 1\} \subset P_2$ .

a) Halle  $k \in \mathbb{R} / A$  resulte linealmente dependiente.

b) Para el valor de  $k$  del ítem anterior, halle el espacio generado por  $A$ , una base y su dimensión.

**Rta:** a)  $k = -1$     b)  $E(A) = \{p \in P_2 / p(x) = ax^2 - ax + b\}, B = \{x^2 - x; 1\}, \dim E(A) = 2$

26) Sea  $S = \text{gen}\{(0, k, 1), (1, -1, 0), (2, 1, 2)\}$  obtenga  $k \in \mathbb{R} / \dim S = 2$ , y extienda una base de  $S$  a una base de  $\mathbb{R}^3$ , con una base de  $S^\perp$ .

**Rta:**  $k = \frac{3}{2}; \quad B = \{(1, -1, 0); (2, 1, 2); (2, 2, -3)\}$

27) Dados los conjuntos:

$$B = \{(-1, 0, 1), (2, -1, 0)\}, \text{ base de } S \subset \mathbb{R}^3 \text{ y } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$$

a) Demuestre que  $W$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , halle una base y su dimensión.

b) Halle  $S+W$  ¿La suma  $S+W$  es directa? Justifique.

**Rta:** a)  $B_W = \{(1, -1, 0); (0, 1, 1)\}; \dim W = 2$     b)  $S + W = \mathbb{R}^3$  la suma no es directa ya que  $S \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (-3, 2, -1)t \wedge t \in \mathbb{R}\}$

28) Sean los subespacios:  $W_1 = \text{gen}\{(-1, 1, 0); (0, -2, 1); (-1, 3, -1)\}$  y  $W_2 = \text{gen}\{(2, a, 1)\}$

a) Halle "a" para que la suma  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

b) Para  $a = -4$ , encuentre el  $W_1 \cap W_2$ , una base y su dimensión. Interprete geoméricamente y grafique ambos subespacios.

**Rta:** a)  $a \neq -4$     b) Si  $a = -4: W_2 \subset W_1 \therefore W_1 \cap W_2 = W_2; B_{W_2} = \{(2, -4, 1)\} \dim W_2 = 1$

$W_1$  es un plano y  $W_2$  una recta.

29) Sea el conjunto  $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b-1 \\ c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ c+1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3a \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$  una base de  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ . Encuentre los valores de “a”, “b”

y “c” para que las coordenadas del vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  sean  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Para los valores hallados, verifique

que B es base de  $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ .

**Rta.:**  $a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = -1$

30) Sean los subespacios de  $P_2$  :

$$S = \text{gen} \{ x + x^2; -1 + x \} \quad \text{y} \quad W = \{ p(x) = a + bx + cx^2 / a = 0 \wedge b = c \}$$

a) Halle  $S + W$ ,  $S \cap W$ , bases y dimensión de cada operación. Indique, justificando la respuesta si la suma es directa.

**Rta.:**  $W \subset S \therefore S + W = S$ ;  $B_S = \{x + x^2; -1 + x\}$ ;  $\dim S = 2$

$S \cap W = W$ ;  $B_W = \{x + x^2\}$ ;  $\dim W = 1$ . La suma no es directa.

31) Sea S subespacio vectorial de  $(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$  tal que:

$$S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / 3x - 2y = 0 \wedge y + z + u = 0\}$$
. Obtenga una base y la dimensión de S y de  $S^\perp$

**Rta.:**  $B_S = \{(2, 3, -3, 0); (0, 0, 1, -1)\}$ ;  $\dim S = 2$ ;  $B_{S^\perp} = \{(3, -2, 0, 0); (0, 1, 1, 1)\}$ ;  $\dim S^\perp = 2$

32) Sea  $B_1 = \{v_1; v_2; v_3\}$  y  $B_2 = \{v_1 + 2v_2 + v_3; v_2 + v_3; -v_2 + v_3\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$ , proporcione todos los  $w \in \mathbb{R}^3$  que tienen las mismas coordenadas en  $B_1$  y  $B_2$

**Rta.:**  $[w]_{B_i} = \begin{bmatrix} h \\ -h \\ 2h \end{bmatrix}$  para  $i = 1 \vee i = 2$  o también  $w = h(v_1 - v_2 + 2v_3) \forall h \in \mathbb{R}$

### EJERCICIOS DE MATRICES Y DETERMINANTES

33) Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine el valor de “a”, si existe, para que la dimensión del espacio columna sea igual a 2. Justifique su respuesta

b) Para  $a = 1$ , defina mediante ecuaciones el espacio generado por las columnas de la matriz A.

**Rta.:** a)  $a = 1$ ,  $\text{rango}(A) = \dim(\text{Ec}(A)) = 2$  b)  $\text{Ec}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$

34) Analice la validez de la siguiente proposición. Demuestre en caso de ser verdadera, o proporcione un contraejemplo en caso de ser falsa:

a) Si  $k \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$  es una matriz invertible entonces  $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

b) Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices invertibles entonces  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

**Rta.:** a) Verdadero, demuestre que:  $(kA)(k^{-1}A^{-1}) = (k^{-1}A^{-1})(kA) = I$

b) Falso Si :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$

35) Obtenga todas las matrices:  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Sugerencia: Premultiplique la ecuación por la matriz P

**Rta:**  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{5}{2}a & -b \end{pmatrix} \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$

**36)** Dado el conjunto:  $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$

a) Halle una base y la dimensión del espacio generado por A.

b) Halle  $k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} 1 & k \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in \text{gen}(A)$

**Rta: a)**  $\bar{A} = \text{gen}(A) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a-3b & 2a+b \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$B_{\bar{A}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}; \dim(\bar{A}) = 2 \quad \text{b) } k = -2$

**37)** Dado  $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / XA = AX \wedge A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ , halle:

a) Una matriz genérica  $X \in S$ , una base y la dimensión de S

b) La relación que deben cumplir los coeficientes de la matriz genérica X para que sea singular.

**Rta: a)**  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R}$  son todas las matrices que conmutan con A.

$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}; \dim S = 2 \quad \text{b) } |a| = |b|$

**38)** Dado el conjunto  $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es antisimétrica y } A^2 = N_{3 \times 3} \}$

a) ¿Es  $(S; +; \mathbb{R}; \cdot)$  un subespacio de  $(\mathbb{R}^{3 \times 3}; +; \mathbb{R}; \cdot)$ ?

b) Si a) es afirmativo: halle una base y la dimensión de S

**Rta: a)** Si,  $S = \{ N_{3 \times 3} \}$  espacio nulo **b)** No existe base,  $\dim S = 0$

**39)** Probar que si las matrices A y B son idempotentes, permutables y del mismo orden, entonces A.B es idempotente

**Rta:**  $\forall A \in \mathbb{R}^{p \times p} \forall B \in \mathbb{R}^{p \times p}: A^2 = A \wedge B^2 = B \wedge AB = BA \Rightarrow (AB)^2 = AB$

Dem  
 $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2 B^2 = AB$

**40)** Sea A una matriz cuadrada de orden n e idempotente y  $B = 2A - I$ , demuestre que B es involutiva.

**Rta:**  $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}: A^2 = A \wedge B = 2A - I \Rightarrow B^2 = I$

a) Dem

$B^2 = BB = (2A - I)(2A - I) = (2A)(2A) + (2A)(-I) + (-I)(2A) + (-I)(-I) =$   
 $= (2 \cdot 2)(AA) + [2 \cdot (-1)](AI) + [(-1)2](IA) + [(-1)(-1)](II) =$   
 $4A^2 + (-2)A + (-2)A + I = 4A + [-2 + (-2)]A + I = 4A + (-4)A + I = [4 + (-4)]A + I = 0A + I = I = I$

**41)** Dado  $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es simétrica } \wedge \text{Tr}(A) = 0 \wedge a_{12} = a_{13} \}$

a) Pruebe que  $(S; +; \mathbb{R}; \cdot)$  es un subespacio de  $(\mathbb{R}^{3 \times 3}; +; \mathbb{R}; \cdot)$

b) Halle una base y la dimensión de S.

**Rta:** a) Sugerencia: La demostración la puede realizar con el elemento genérico del espacio

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & c & d \\ b & d & -(a+c) \end{pmatrix} \text{ o utilizando el sistema de 3 ecuaciones } \begin{cases} A = A^T \\ \text{Tr}(A) = 0 \\ a_{12} = a_{13} \end{cases}$$

$$b) B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim S = 4$$

42) Dados  $S = \{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / |A| = 0 \wedge \text{Tr}(A) = 0 \}$  y  $W = \{ B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / B = -B^T \}$

- a) Es  $S$  un subespacio de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.  
 b) Es  $W$  un subespacio de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.  
 c) Es  $S \cap W$  un subespacio de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ? En caso afirmativo dar una base y la dimensión.

**Rta:** a) No,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in S \wedge \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \notin S$  la suma no es ley de composición interna en  $S$ .

b) Si, sugerencia  $W = \{ B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \}$  una base  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;  $\dim W = 1$

c) Si, es el espacio nulo:  $S \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ; no posee base;  $\dim S \cap W = 0$

43) Dado el subespacio  $S = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / A \text{ es triang. sup. y } a_{k1} + a_{k2} + a_{k3} = 0 \text{ para } k = 1; 2; 3 \}$

Determine una base y la dimensión de  $S$ . ¿Existe  $A \in S$  tal que  $A$  sea inversible?. Justifique.

**Rta:**  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ;  $\dim S = 3$ ; No,  $\text{rg}(A) < 3$

44) Justifique si cada una de las siguientes afirmaciones son V o F ( si es verdadera, debe demostrarlo, si es falsa es suficiente con un contraejemplo)

- a) Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} / |B| \neq 0 \Rightarrow |B^{-1}AB^T| = |A|$   
 b) Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} / A^T A = I \Rightarrow |A| = 1$   
 c) Sean  $A, B, I \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / |A| = 1 \wedge B = 2I \Rightarrow |A^2 B^{-1} + A^2 B| = \frac{125}{8}$

**Rta.:** a) V b) F c) V

45) Sea  $A = ( A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 ) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  donde  $A_j$  indica la columna  $j$  de  $A$  y sea

$B = ( -A_3 \ 2A_4 + A_2 \ A_1 \ 5A_4 )$ . Calcule:  $\det \left( (A^T)^2 \cdot 2B^{-1} \right)$  sabiendo que  $\det(A) = a \neq 0$

**Rta:**  $\frac{16}{5}a$

46) Dada  $A = ( A^1 \ A^2 \ A^3 ) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con  $|A| = 3$ . Calcule:

a)  $\left| \frac{1}{3} A^T \cdot B \right|$  siendo  $B = ( A^1 - 2A^2 \ A^1 \ \frac{1}{3}A^3 )$

b)  $\left| (A^T)^{-1} \cdot \frac{1}{2} M^T \right|$  siendo  $M = \begin{pmatrix} -A^2 & 2A^2 + A^1 & 3A^3 \end{pmatrix}$

c) Justifique porque la matriz  $E = B.M$  es inversible

d) ¿ Las columnas de E son linealmente independientes o dependientes? Justifique.

**Rta:** a)  $\frac{2}{9}$     b)  $\frac{3}{8}$     c) Como  $|B| = 2 \neq 0 \wedge |M| = 9 \neq 0$ , entonces ambas matrices tienen rango tres y por lo tanto son inversibles y también es inversible su producto  $E^{-1} = (B.M)^{-1} = M^{-1}.B^{-1}$ . d) Como  $|E| = 18 \neq 0$  entonces el rango de la matriz es tres, igual al rango columna, por lo tanto las columnas de E son linealmente independientes.

47) Sea P una matriz antisimétrica de orden “n” impar. ¿Cuánto vale el determinante de P? Justifique.

Nota: P es antisimétrica  $\Leftrightarrow P = -P^T$

**Rta.:**  $|P| = 0$  Sugerencia: Aplique la función determinante a la ecuación:  $P = -P^T$  y propiedades.

48) Siendo  $A_{n \times n} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n} / a_{ij} = \begin{cases} x & \text{si } i=j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$  Halle  $B = \{x \in \mathbf{Z} / |A_{4 \times 4}| = |A_{3 \times 3}|\}$

**Rta:**  $|A_{4 \times 4}| = (x+3).(x-1)^3$  ;  $|A_{3 \times 3}| = (x+2).(x-1)^2$  ;  $B = \{ 1 \}$

49) Dada la matriz  $A_n = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n} / a_{ij} = \begin{cases} x^i & \text{si } j=1 \\ j^i & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$  Halle  $B = \{x \in \mathbf{R} / A_3 \text{ sea singular}\}$

**Rta:**  $|A_3| = 6x(x-2).(x-3)$      $B = \{ 0 ; 2 ; 3 \}$

50) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x-2 & 0 & x+2 \\ x-2 & x-3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Indique para que valores de  $x \in \mathbf{R}$  la matriz A es singular.

b) Para los valores de x obtenidos en a), encuentre el espacio columna de A, dé una base y su dimensión.

c) Para  $x = 0$ , calcule  $\left| (A^{-1})^2 \cdot 2 B^T \right|$  siendo  $B = (A^2 - 2A^1 \quad A^3 \quad -A^2)$

**Rta.:** a)  $x = -2$      $|A| = (x+2).(x^2 - 3x + 4)$

b)  $\text{Ec}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 / -10x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$  Una base  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$  ;  $\dim \text{Ec}(A) = 2$

c)  $|A| = 8 \Rightarrow |B| = -16 \Rightarrow \left| (A^{-1})^2 \cdot B^T \right| = -2$

**PARCIALES Y RECUPERATORIOS**

- 1) Dados los planos:  $\pi_1 : x - y = 0$  ;  $\pi_2 : y + z + 1 = 0$

Halle la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a los planos anteriores y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 1. Grafique las soluciones

- 2) Dadas las rectas  $r_1 : x = y = z + 4$  y  $r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = a \end{cases}$

a) Qué valores debe tomar la constante "a" para que las rectas sean coplanares, encuentre el plano que las contiene.

b) Para  $a = 0$ , calcule la distancia entre las rectas.

- 3) Sean S y W subespacios vectoriales de  $(\mathbb{R}^3, +, R, \cdot)$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + ay + z = 0\} ; W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = \lambda(1, 0, b), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a) Encuentre una base ortonormal de S.

b) Halle los valores de a y b tal que:

i) El complemento ortogonal de S sea igual a W, dé una interpretación geométrica.

ii) La suma S+W sea directa, dé una interpretación geométrica.

- 4) Dado el siguiente subespacio vectorial de  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, R, \cdot)$

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = A^T\}$$

a) Encuentre una base y la dimensión de S.

b) Halle las coordenadas de I (I matriz identidad) en la base obtenida en el ítem anterior.

c) Sea el subespacio  $W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A = A^T \wedge AB = BA \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset S$

Encuentre un elemento genérico del W .

- 5) Sean  $A = (A_1 \ A_2 \ A_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \text{Det}(A) = k \neq 0$  y

$$B = (A_1 - 3A_2, \alpha A_2 + 2A_3, -A_1).$$

Verifique que B es inversible para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  y obtenga  $\text{Det}(B^{-1})$  en función de k.

**RESOLUCIÓN**

1)

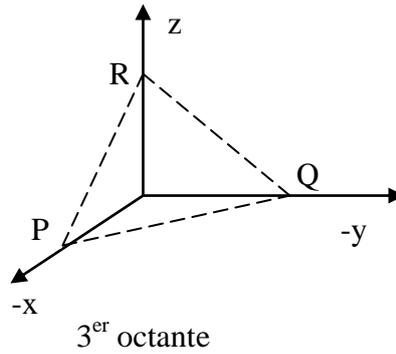
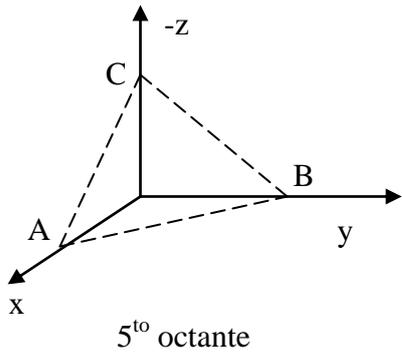
Hallar:  $\alpha / \alpha \perp \pi_1 \wedge \alpha \perp \pi_2 \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1$

$$\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{\pi_2} \wedge \text{dist}(\alpha, O) = 1 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} \wedge \frac{|d|}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\vec{n}_\alpha = (-1, -1, 1) \wedge (d = \sqrt{3} \vee d = -\sqrt{3})$$

$$\alpha_1 : -x - y + z + \sqrt{3} = 0 \qquad \alpha_2 : -x - y + z - \sqrt{3} = 0$$

$$A(\sqrt{3}, 0, 0); B(0, \sqrt{3}, 0); C(0, 0, -\sqrt{3}) \qquad P(-\sqrt{3}, 0, 0); Q(0, -\sqrt{3}, 0); R(0, 0, \sqrt{3})$$



2) a)

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -4 + t \end{cases} \quad A(0,0,-4) \in r_1 \wedge \vec{u}_1 = (1,1,1) // r_1$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = a \\ z = \lambda \end{cases} \quad B(2,a,0) \in r_2 \wedge \vec{u}_2 = (0,0,1) // r_2$$

$$r_1 \text{ y } r_2 \text{ son coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0 \quad \boxed{a = 2}$$

Hallar  $\pi / r_1 \subset \pi \wedge r_2 \subset \pi$

$$\forall (x, y, z) \in \pi : \overrightarrow{AP}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0$$

$$\boxed{x - y = 0}$$

b) Si  $a = 0$  las rectas son alabeadas

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \sqrt{2}}$$

3) a) Para cualquier valor real de "a" la dimensión del espacio es dos y el lugar geométrico es un plano. Existen infinitas bases ortonormales de S, cualquier par de vectores ortogonales normalizados que sean vectores posición de puntos del plano S, por ejemplo:

$$\vec{u} = (1,0,-1) \wedge \vec{v} / \vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ un normal de } S)$$

$$\text{Una solución : } \vec{v} = \vec{u} \times \vec{n} = (a, -2, a)$$

$$B = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{a}{\sqrt{2a^2+4}}, \frac{-2}{\sqrt{2a^2+4}}, \frac{a}{\sqrt{2a^2+4}} \right) \right\}$$

b)

$$\text{i) } \forall (x, y, z) \in S : \langle (x, y, z), (1, a, 1) \rangle = 0 \Rightarrow (1, a, 1) \in S^\perp$$

$$S^\perp = W \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} / (1, a, 1) = t(1, 0, b)$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{b} \wedge a = 0 \quad \boxed{a = 0 \wedge b = 1}$$

S plano perpendicular a  $(1, a, 1)$  y W es una recta perpendicular al plano S en el origen.

$$S + W \text{ es directa} \Leftrightarrow S \cap W = \{(0,0,0)\}$$

$$\text{ii) } S \cap W : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = b\lambda \\ \lambda + b\lambda = 0 \end{cases} \quad \text{comp. det.} \Rightarrow (1+b)\lambda = 0 \wedge 1+b \neq 0$$

$a \in \mathbb{R} \wedge b \neq -1$ , la recta no debe estar contenida en el plano.

4) a) Existen infinitas bases, por ej.:  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim S = 3$

b)  $[I]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  c)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge a, b \in \mathbb{R}$

5)  $\text{Det}(B) = 6k \wedge k \neq 0 \therefore B$  es inversible  $\text{Det}(B^{-1}) = \frac{1}{6k}$

1er PARCIAL

1) Dados:  $\pi: x + ay - z + 4 = 0$  y  $L: (x, y, z) = (1, 0, b) + (2, 1, 1)t \quad ; \forall t \in \mathbb{R}$

Encuentre el valor de las constantes "a" y "b" de tal forma que:

a) La recta se encuentre a una distancia igual a  $\sqrt{3}$  unidades del plano.

b) La recta esté contenida en el plano.

2) Dados los planos:  $\pi_1: 3x + 2y + z - 6 = 0$  y  $\pi_2: x + 2z - 4 = 0$

a) Halle la recta intersección de los planos y grafique los planos y la recta.

b) Encuentre el plano que contiene a la recta anterior y es perpendicular al plano  $\alpha: x = 5$

3) Los vectores  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  y  $\vec{v} = (-2, a, -2)$  pertenecen al mismo subespacio S de  $\mathbb{R}^3$  y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0\}.$$

Halle, si existe, el valor de la constante "a" de tal forma que:

a)  $\dim(S^\perp) = 2$ . Obtenga una base de  $S^\perp$

b)  $S + T = \mathbb{R}^3$ .

4) Dado el conjunto:

$$A = \{1 + x; -1 + x^2; x + x^2\} \subset P_2$$

Indique V o F, justifique su respuesta:

a) A es una base de  $P_2$

b)  $p(x) = -3 - x + 2x^2 \in \text{gen}(A)$

5) Sean A, B dos matrices de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Analice la validez de las siguientes proposiciones, justifique la respuesta:

a) Si  $A \cdot B - A^2 = I$  entonces A es inversible

b) Si  $A^2 = N$  entonces  $A = N$  (N es la matriz nula de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ )

RESOLUCIÓN

1) a)

$$\pi: x + ay - z + 4 = 0 \quad \text{y} \quad L: (x, y, z) = (1, 0, b) + (2, 1, 1)t$$

$$L // \pi \wedge \text{dist}(L, \pi) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \vec{u}_L \perp \vec{n}_\pi \wedge \text{dist}(A, \pi) = \sqrt{3}, \forall A \in L$$

Datos:  $\vec{u}_L = (2,1,1)$  ;  $\vec{n}_\pi = (1, a, -1)$  ;  $A(1,0,b)$

$$(2,1,1)(1, a, -1) = 0 \wedge \frac{|1 + a \cdot 0 - b + 4|}{\|\vec{n}_\pi\|} = \sqrt{3} \Rightarrow a = -1 \wedge \frac{|-b + 5|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{a = -1 \wedge (b = 2 \vee b = 8)}$$

b)

$$L \subset \pi \Leftrightarrow \forall P : P \in L \Rightarrow P \in \pi$$

$$P(1 + 2t, t, b + t)$$

$$1 + 2t + at - (b + t) + 4 = 0$$

$$(a + 1)t = -5 + b \Rightarrow a + 1 = 0 \wedge -5 + b = 0$$

$$\boxed{a = -1 \wedge b = 5}$$

También se puede resolver :

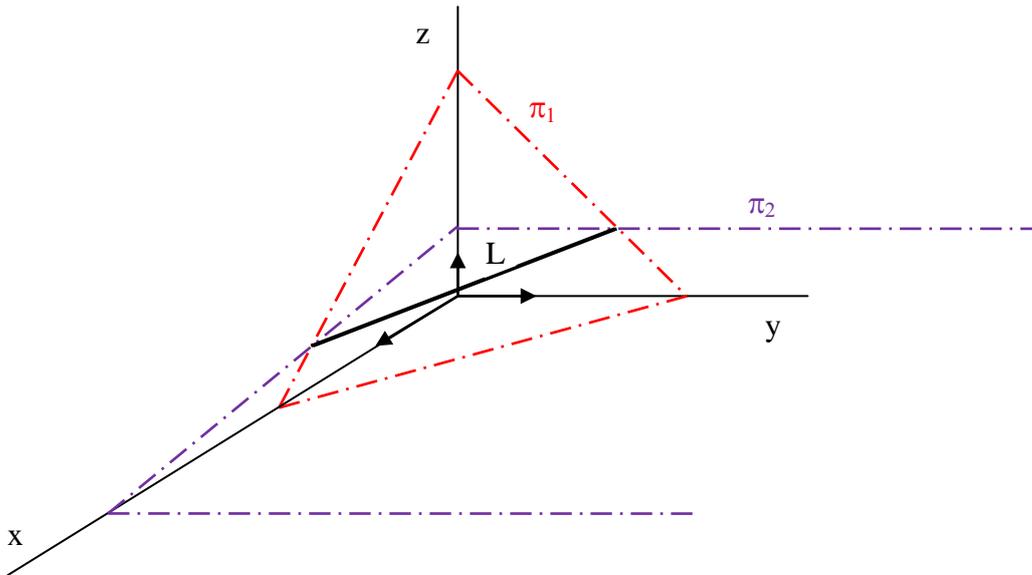
Del ítem a)

$$L \subset \pi \Leftrightarrow L // \pi \wedge \text{dist}(L, \pi) = 0$$

$$a = -1 \wedge b = 5$$

2) a)

$$L = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} 3x + 2y + z - 6 = 0 \\ x + 2z - 4 = 0 \end{cases} \quad L : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -3 + 5t \\ z = 2t \end{cases}$$



b)

ec. del haz :  $(3a + b)x + (2a)y + (a + 2b)z + (-6a - 4b) = 0$

$$\pi_3 \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_3} \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{n}_{\pi_3} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (3a + b; 2a; a + 2b)(1; 0; 0) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$$

Una solución no trivial :  $a = 1 \wedge b = -3$

$$\boxed{\pi_3 : 2y - 5z + 6 = 0}$$

$$\dim(S^\perp) = 2 \Rightarrow \dim(S) = 1$$

$$(\dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3))$$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k \vec{u} \Rightarrow \exists k = -2 / (-2, a, -2) = k(1, 0, 1) \wedge a = 0 \quad \boxed{a=0}$$

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x + z = 0\}$$

$$\boxed{B_{S^\perp} = \{(1, 0, -1); (0, 1, 0)\}}$$

b)

Como  $\vec{u} = (1,0,1) \in T \wedge \vec{v} = (-2, a, -2) \in T \Rightarrow \text{gen}(\vec{u}; \vec{v}) \subset T \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow S+T = T$

$$\boxed{\therefore \exists a \in \mathbb{R} / S+T = \mathbb{R}^3}$$

4) a)

$\dim(P_2) = 3$  si A es L.I.  $\Rightarrow$  A es base de  $P_2$

$$\alpha(1+x) + \beta(-1+x^2) + \gamma(x+x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = a \\ \gamma = -a \end{cases} \text{ infinitas soluciones}$$

A no es linealmente independiente por lo tanto no es base. **Falso**

b)

De a)  $\dim(\text{gen}(A)) = 2$

$$-3 - x + 2x^2 = \alpha(1+x) + \beta(-1+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -3 \\ \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \text{ Verdadero}$$

5) a) **Verdadero**

$AB - A^2 = I \Rightarrow |AB - A^2| = |I| \Rightarrow |A(B - A)| = 1 \Rightarrow |A||B - A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$  inversible

b) **Falso**

Contraejemplo  $\exists A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / A^2 = N \wedge A \neq N$

### PARCIAL

1) Dadas las rectas:

$$L_1 : x + 2 = \frac{y}{a} = z \quad ; \quad L_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = b \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

a) Halle los valores de las constantes reales "a" y "b" tal que las rectas  $L_1$  y  $L_2$  se corten formando un ángulo recto.

b) Para  $a = 1$  y  $b = 0$ , calcule la distancia entre las rectas

2) Dado el plano  $\pi : (x, y, z) = (1, -1, 1) + (1, 0, 1)t_1 + (0, 1, 1)t_2 ; t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  y la recta

$L : (x, y, z) = (1, 1, 1)\lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$ . Encuentre:

a) El plano que contiene a la recta L y es perpendicular al plano  $\pi$ .

b) La proyección de la recta L sobre el plano  $\pi$ .

3) Dado el conjunto  $A = \{(1, 1, 0); (0, a, 1); (2, b, 0)\}$

a) Encuentre el rango del conjunto para los distintos valores de las constantes a y b.

b) Para  $a = b = 2$ , halle el espacio generado por A y dé una base de dicho espacio.

c) Halle las coordenadas del vector  $\vec{u} = (-1, 5, 3)$  en la base que obtuvo en el ítem anterior.

4) Dado el siguiente subespacio de  $\mathbb{R}^4$ :  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 = x_2 = x_3\}$ , Encuentre:

a) Una base del complemento ortogonal de S.

b) Construya una base de  $\mathbb{R}^4$  con una base de S y la base que obtuvo en el ítem anterior.

5) Dada la matriz:  $A = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} / \text{Det}(A) = a \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Calcule:

$$\text{Det}(2A^2B^{-1}), \text{ siendo } B = (A_1 + 2A_3 \quad -A_3 \quad A_2 \quad 3A_4)$$

**RESOLUCIÓN**

1) a)

$$A(-2,0,0) \in L_1; \vec{u}_1 = (1, a, 1) // L_1 (a \neq 0) \quad B(1,2,b) \in L_2; \vec{u}_2 = (1,1,0) // L_2$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Rightarrow (1, a, 1) \cdot (1, 1, 0) = 0 \Rightarrow 1 + a = 0 \therefore a = -1 \quad (\text{cond. de perpendicularidad})$$

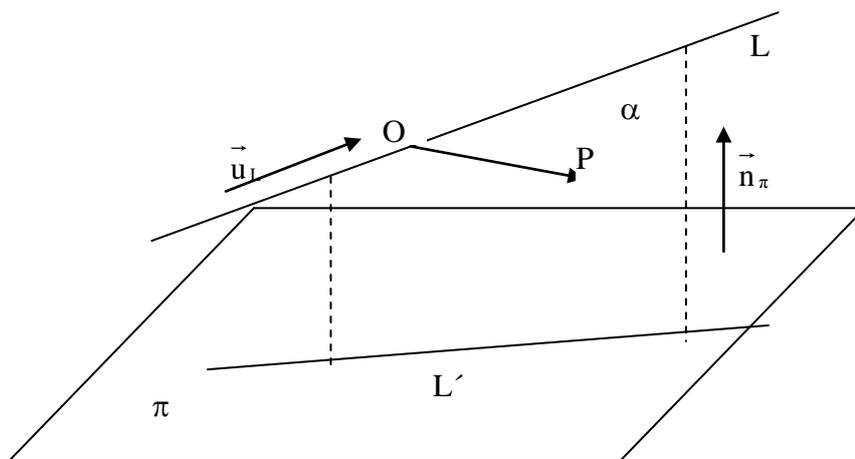
$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ coplanares} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & b \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \quad \boxed{a = -1 \wedge b = \frac{1}{2}}$$

b)

$$b = 0 \Rightarrow b \neq \frac{1}{2} \therefore \text{ las rectas son alabeadas } \text{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\overrightarrow{AB}(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{\|(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)\|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\|(-1, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\text{dist}(L_1, L_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$2) \text{ a) } \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \pi: x + y - z + 1 = 0$$



Construyamos  $\alpha / L \subset \alpha \wedge \alpha \perp \pi \therefore \alpha: \overrightarrow{OP} \cdot (\vec{u}_L \times \vec{n}_\pi) = 0$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\alpha: x - y = 0}$$

b)  $L' = \pi \cap \alpha : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$L' : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

3) a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - b$$

Si  $b \neq 2$ :  $\text{rg}(A) = 3$

Si  $b = 2$ :  $\text{rg}(A) < 3 \wedge \{(1,1,0); (0,a,1)\}$  L.I.  $\Rightarrow \text{rg}(A) = 2$

$\forall a \in \mathbb{R} \wedge b \neq 2 : \text{rg}(A) = 3$   
 $\forall a \in \mathbb{R} \wedge b = 2 : \text{rg}(A) = 2$

b) Si  $a = b = 2$ :  $\text{rg}(A) = 2 \therefore \text{gen}(A) = \text{gen} \{(1,1,0); (0,2,1)\}$

$\text{gen}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1,1,0)\lambda_1 + (0,2,1)\lambda_2\}$  Una base  $B_A = \{(1,1,0), (0,2,1)\}$   
 $\text{gen}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$

c)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = 3 \therefore \vec{u}_{B_A} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4)  $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,1,0)t_1 + (0,0,0,1)t_2\}$

Una base de  $S$ :  $B_S = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$S^\perp : \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1,1,1,0) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0,0,0,1) \rangle = 0 \end{cases} \quad S^\perp : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad S^\perp : \begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Una base de  $S^\perp$ :  $B_{S^\perp} = \{(1,0,-1,0), (0,1,-1,0)\}$

Una base de  $\mathbb{R}^4$ :  $B = B_S \cup B_{S^\perp} = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1), (1,0,-1,0), (0,1,-1,0)\}$

5)  $\text{Det}(B) = \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 + 2A_3 & -A_3 & A_2 & 3A_4 \\ A_1 & -A_3 & A_2 & 3A_4 \end{pmatrix} \stackrel{1^\circ C+2^\circ 2^\circ C}{=} \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & -A_3 & A_2 & 3A_4 \\ A_1 & -A_3 & A_2 & 3A_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{ext}(-1)}{\text{ext}3}{=}$

$= -3 \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & A_2 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \stackrel{A_3 \leftrightarrow A_2}{=} 3 \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} = 3a$

$\text{Det}(2A^2 B^{-1}) = \text{Det}(2A^2) \text{Det}(B^{-1}) = 2^4 \text{Det}(A^2) [\text{Det}(B)]^{-1} = 16 [\text{Det}(A)]^2 [\text{Det}(B)]^{-1} = 16a^2 (3a)^{-1} = \frac{16}{3}a$

$\text{Det}(2A^2 B^{-1}) = \frac{16}{3}a$