UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

UDB MATEMATICA

GUÍA DE EJERCICIOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

SEGUNDA PARTE

Información general de la asignatura:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/analisis-matematico-i-generalidades/

Programa de la asignatura:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/analisis-matematico-i-programa/

Ejemplos de exámenes finales:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/examenes-tipo-analisis-matematico-i/

Práctica 5 (primitivas)

Primitivas-Propiedades

1) Decidir el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) F(x)=$\frac{1}{x}+c$ es una primitiva de f(x)=ln x

b) F(x)=x^2 - 3 es una primitiva de f(x)=2x

c) F(x)= e^{2x} + $\sqrt{2}$ es una primitiva de f(x)=e^{2x}

d) F(x)= $2^x\,3^x + 2$ es una primitiva de f(x)=6^x ln6

e) F(x)=ln x es una primitiva de f(x)=1/x

f) F(x)=ln |x|+1 es una primitiva de f(x)=1/x

2) Expresar el resultado de los siguientes cálculos aplicando convenientemente las propiedades de la integral:

a) $\int kf(x)dx =$

b) $\int [f(x)+g(x)]dx$

c) $\int [f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]dx$

d) $\int [f(g(x))g'(x)]\,dx$

e) $\int e^{f'(x)} f''(x)dx$

3) Mostrar que una primitiva de la función f(x)= $|x|$ es F(x)= x$\left|\frac{x}{2}\right|$

4) La aceleración de un móvil en función del tiempo es a(t)= 5t.

a) Hallar la velocidad en función del tiempo, sabiendo que parte del reposo.
b) Hallar la posición en función del tiempo sabiendo que parte del km 3.

Integrales inmediatas

5) Resolver las siguientes integrales aplicando las reglas de integración:

a) $\int (2x+3)dx$

b) $\int \left(2x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{3}\right)dx$

c) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^4} - \frac{3}{x}\right)dx$

d) $\int \left(\frac{x^5+3x^4-2x}{4x}\right)dx$

e) $\int\left(\frac{5}{x^3}+\frac{2x}{\sqrt[3]{x^4}}\right)dx$

f) $\int\left(4e^x+5\cos x-\frac{7}{2}\right)dx$

g) $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-senx\right)dx$

h) $\int\left(\frac{2+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

i) $\int\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}}dx$

j) $\int(\sec^2 x-\cos ec^2x)dx$

Integrales por sustitución

6) Resolver las siguientes integrales aplicando el método de sustitución.

a) $\int\frac{e^x}{e^x+3}dx$

b) $\int\frac{sen(2x)}{3+\cos(2x)}dx$

c) $\int(\cos x+3)^{10}senxdx$

d) $\int\sqrt[5]{sen(3x)}\cos(3x)dx$

e) $\int\frac{\ln(x+2)}{x+2}dx$

f) $\int\frac{x}{x^2+1}dx$

g) $\int xsen(x^2)dx$

h) $\int e^{5x}\sqrt{e^{5x}+3}dx$

i) $\int\frac{2+x}{x-3}dx$

j) $\int\left(\frac{arctgx}{1+x^2}\right)dx$

k) $\int sen(2x-1)dx$

l) $\int\frac{senx-3}{\cos^2 x}dx$

m) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

n) $\int\left(\frac{2}{9+(x-2)^2}\right)dx$

7) Teniendo en cuenta que:

$sen^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ y que $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ resolver:

a) $\int\cos^2 x\ dx$

b) $\int\cos^3 x\ dx$

c) $\int\cos^4 x\ dx$

d) $\int\cos^2 x\ sen^2x\ dx$

Integrales por partes

8) Resolver aplicando el método de integración por partes:

a) $\int xe^{x}dx$

b) $\int x^{2}e^{x}dx$

c) $\int (3+x)senxdx$

d) $\int (2-x^{2})\cos xdx$

e) $\int sen^{2}xdx$

f) $\int (x+2)^{\frac{1}{2}}x^{2}dx$

g) $\int x^{2}\ln xdx$

h) $\int \ln(x)dx$

i) $\int sen(\ln x)dx$

j) $\int \left(\frac{x}{\sqrt{2+x}}\right)dx$

k) $\int x3^{x}dx$

l) $\int \cos xe^{x/3}dx$

m) $\int arcsenxdx$

n) $\int x\sqrt{2-x}dx$

Fracciones simples

9) Resolver aplicando el método de integración por descomposición en fracciones simples:

a) $\int \frac{x+1}{x^{2}-4}dx$

b) $\int \frac{x^{2}}{9-x^{2}}dx$

c) $\int \frac{2x}{x^{2}+x-2}dx$

d) $\int \frac{5-x}{x^{2}+2x+1}dx$

e) $\int \frac{x^{3}}{x^{2}+4x+4}dx$

f) $\int \frac{x-2}{x^{2}+1}dx$

G) $\int \frac{x+5}{x^{3}-6x^{2}+9x}dx$

h) $\int \frac{x^{2}-3x}{(x-1)(x^{2}-4x+4)}dx$

i) $\int \frac{3}{(x-2)(x^{2}+9)}dx$

j) $\int \frac{x^{4}}{1-x^{10}}dx$

k) $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}-4}dx$

l) $\int \frac{\ln x+1}{x(\ln^{3}x+\ln^{2}x-2\ln x)}dx$

10) Calcular:

a) $\int \frac{1}{x^{2}+2x+5}dx$

b) $\int \frac{x-3}{x^{2}+2x+5}dx$

c) $\int \frac{x}{(x-2)(x^{2}+2x+5)}dx$

11) Resolver con el método que considere mas adecuado en cada caso.

a) $\int e^{6x}\cos(e^{3x})dx$

b) $\int \sqrt[3]{\sqrt{2x}+3}\,dx$

c) $\int \frac{\ln(2x)\ \ sen(\ln(2x))}{x}dx$

d) $\int \frac{\cos x}{sen^2 x+1}dx$

e) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$

f) $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2(1+e^{\frac{2}{x}})}dx$

g) $\int \frac{6}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

h) $\int 2x\ln^2(x^2+1)\ dx$

i) $\int \frac{senx\cos x}{4-\cos^2 x}dx$

j) $\int x\ \sqrt[3]{\frac{2-x}{3}}dx$

k) $\int (4x+4)\ln(1/x)dx$

l) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+3}dx$

12) a) Utilizando la sustitución $x = sen t$ calcular $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

b) Utilizando a) calcular:

b1) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ b2) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$ b3) $\int \sqrt{12x-3x^2-8}\,dx$

c) Utilizando la tabla de integrales calcular:

c1) $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$ c2) $\int \sqrt{x^2-4}\,dx$ c3) $\int \sqrt{12x+3x^2}\,dx$

Ecuaciones diferenciales

13) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $x.dy = y.dx$

b) $y.y' = x.sen(x^2)$

c) $x.y' - y^2 = x.y^2$

d) $4xdy - ydx = x^2dy$

e) $y' + 3y = 2$

f) $(1+x^3).y' = x^2.y$

14) Hallar las curvas planas tales que la recta tangente en todo punto pasa por el origen.

15) Hallar las curvas planas tales que la pendiente en cada punto es igual al cociente entre la abscisa y la ordenada del punto.

16) Hallar la curva plana que pasa por el (1,6) y satisface que en cada punto (x, y) la recta tangente se interseca con el eje de ordenadas en un punto de ordenada 5y.

17) Un termómetro que marca 10^0C se lleva a una habitación de 20^0C. En un minuto la temperatura del termómetro asciende a 15^0C. Si la velocidad con que cambia la temperatura del termómetro es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la de la habitación (que se mantiene constante)

a) Obtener y graficar el comportamiento de la temperatura del termómetro en función del tiempo.
b) ¿En que instante el termómetro marcará una diferencia de 1^0C con respecto a la temperatura ambiente?

18) Una bola esférica de nieve se derrite de manera que la derivada de su volumen V(t) respecto del tiempo es proporcional a su área en ese mismo momento. Si para t=0 el diámetro es de 5 cm. Y 30 minutos después el diámetro es de 2 cm. ¿En qué momento el diámetro será de 1cm.?

Práctica 6 (Integral definida y aplicaciones)

Integral definida

1) Dibujar la región asociada a cada integral definida y evaluarlas a través de alguna fórmula geométrica:

a) $\int_{1}^{2} 5\,dx$ b) $\int_{0}^{2} x+3\,dx$ c) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ d) $\int_{-1}^{3} x\,dx$

2) Determinar si las funciones dadas son integrables en el intervalo dado. Justificar. En caso afirmativo calcular el valor de la integral definida en dicho intervalo.

a) $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x-2} + 2\,sen(\frac{\pi}{2}x)$ en (2; 3) b) $f(x)$ = sig(x) en [-1; 1]

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & si\, x \in Q \\ -1 & si\, x \notin Q \end{cases}$ en [0; 1] d) $f(x) = [x]$ en [-3; 1,5]

3) Sabiendo que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ y $\int_{0}^{1} f(x)dx = 2$, hallar

$a) \int_{-1}^{0} f(x)dx$ $b) \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{0} f(x)dx$

$c) \int_{-1}^{1} 3f(x)dx$ $d) \int_{0}^{1} 3f(x)dx$

4) Dada f continua en el intervalo [-3; 3] y si se sabe que $\int_{0}^{3} f(x)dx$ = 5, hallar

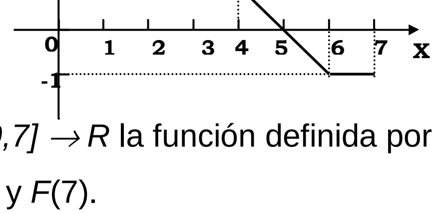
a) $\int_{0}^{3} \left(f(x)+1\right)\,dx$

b) $\int_{-1}^{2} f(x+1)dx$

c) $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ suponiendo que *f* es par

d) $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ suponiendo que *f* es impar

5) La figura representa el gráfico de una función *f: [0,7]* $\rightarrow$ *R .*



Considere *F : [0,7]* $\rightarrow$ *R* la función definida por $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$.

a) Calcular $F(4)$ y $F(7)$. b) Realizar un gráfico de F.

6) Calcular y graficar la función $F_i(x) = \int_{-1}^{x} f_i(t)dt$ para las funciones f_i dadas, en el intervalo que corresponda.

a) $f_1(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -1 \le x < 0 \\ 2 & si \quad 0 \le x < 4 \\ 1/2 & si \quad 4 \le x \le 6 \end{cases}$ b) $f_2(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -1 \le x \le 0 \\ x+3 & si \quad 0 < x < 2 \end{cases}$

c) ¿Qué representa $F_1(5)$?

d) $f_3(x) = |f_1(x)|$ ¿Qué representa $F_3(5)$?

7) Si $g, h:[c,d] \to [a,b]$ con derivada continua, y $f:[a,b] \to R$ es continua, utilizando la regla de derivación de una función compuesta y el teorema fundamental, pruebe que si $F(u) = \int_{a}^{u} f(t)dt$ entonces:

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x)).g'(x)$ b) $\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$

c)Utilizando los resultados de a) y b) calcular:

c1) $F'(2)$ siendo $F(x) = \int_{-3}^{x^2+5x} te^{-t}dt$ c2) $F'(0)$ siendo $F(x) = \int_{x^2+5}^{\cos(x)} e^{t}dt$

8) La función F (x) = 3 - $\int_{x}^{0} e^{-t^2} dt$ ¿presenta un punto de inflexión en x = 0?

9) Hallar f si se sabe que es continua en R y

$$\int_0^x f(u)\,du = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

10) Si f es continua en R determinar los valores $f(1)$ y $f(4)$ si se sabe que

$$x.sen\pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt.$$

11) Encontrar una función H derivable en R , no idénticamente nula, tal que:

$$H^2(x) = \int_0^x H(u)\frac{\cos u}{1+sen^2 u}du \quad \forall\, x \in R$$

12) Sea $g(x)=x^2+\int_1^{x^2} e^{sen(\pi t)}dt$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de a=1

13) a) Calcular:

a1) $\int_0^5 (x-3)dx$	a2) $\int_{-2}^0 xe^{x^2}dx$
a3) $\int_0^5 \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$	a4) $\int_0^\pi x.sen\,xdx$

b) Las integrales calculadas en a) ¿representan el área limitada por el gráfico de y=f(x), el eje x y las rectas de ecuación x=a y x=b?

14) Dadas las siguientes funciones continuas en los intervalos indicados en cada caso, hallar el promedio de la función en el intervalo y el valor de la abscisa en el cuál se obtiene ese valor promedio.

$a) f(x)=x^2-2 \quad en[-3,3]$

$b) f(x)=senx+2 \quad en\ [0,\pi]$

$c) f(x)=\frac{x^2+4}{x} \quad en[1,3]$

15) Para la función *f*(*x*)= a*x*+b con b>0 y a>0 demostrar que el promedio de la función en un intervalo $[x_1, x_2]$ es ac+b, donde c es el punto medio del intervalo. Interpretar geométricamente.

16) Indicar si es V o F justificando:

a) Si f es discontinua en c$\in [a,b]$, entonces f no es integrable en$[a,b]$

b) Si $\int_a^b f(x)dx>0$ entonces f es no negativa para todo x de $[a,b]$

c) $\int_{-1}^1 x^{-2}dx=\left[-x^{-1}\right]_{-1}^1=(-1)-1=-2$

d) Si F'(x)=G'(x) en R y $[a,b]\subset R$, entonces F(b)-F(a)=G(b)-G(a)

Cálculo de áreas

17) Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $y=4x-x^2$ y el eje de las abscisas.

18) Calcular el área de la región comprendida entre las curvas:

$a) y=\sqrt{x}, y=x-2, x=0$

$b) y=-2+\ln(x), y=0, x=1, x=10$

$c) y=\left(1-\sqrt{x}\right)^2, x=0, y=0$

19) Calcular el área de la región comprendida entre las gráfica de $y^2 = x$, las rectas x = 8 e y = 1.

20) Hallar el área de la región limitada por el eje Y, la recta de ecuación y=8 y el gráfico de la función definida por: $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^3+4$.

21) Hallar el área de la región limitada por el eje X y el gráfico de la función $f(x)=\frac{-6}{3x-5}+\frac{3}{2}$ y las rectas x=5 y x=2

22) Calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones: $f(x)=7x^3e^{x^4-2x^2}$ y $g(x)=7x\ e^{x^4-2x^2}$

23) Calcular el área de la región comprendida entre las gráfica de las parábolas $y^2 = 2\,p\,x$, y $x^2 = 2\,p\,y$, para p > 0.

24) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas:

$y = x^3 - 5$ e $y = -2x^2 + 3x - 5$

25) Hallar a ε R (a>0) para que el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x)=2\sqrt{x}-6$ y el eje X para 0 ≤ x ≤ a sea igual a 36.

26) Determine c > 1 de modo que el área de la región limitada por las curvas $y=e^{-2(x-5)}$, $y=e^{2(x-5)}$ y la recta de ecuación y = c sea 1.

27) Hallar a ε R, a > 0 tal que el área de la región acotada comprendida entre las curvas y = a x , $y = x^2$, e $y = a^2$ sea 7 / 48.

28) Determine el área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{x}$, x > 0, y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos de la curva, de abscisas x = 2 y x = ½, respectivamente.

29) Sea y = 3 (x – a).(x – 4), donde 0 < a < 4 y:
A_1 = área entre el eje Y, el eje X y la curva ;
A_2 = área entre el eje X y la curva entre x = a y x = 4.
Hallar a ε (0 ; 4) / $A_1 = A_2$.

30) La parábola de ecuación $y = x^2 - \frac{1}{4}$ divide a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, en dos regiones. Hallar las áreas de las dos regiones.

31) Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$, la asíntota oblicua de la misma, y 1 ≤ x ≤ 2.

32) El valor medio de una función continua *f(x)* sobre el intervalo [a,b], es $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

a) Si $f(x) = x^2$. Calcule c tal que c ε (0, 3) y f(c)
b) Demuestre que el área de la región por encima de y = f(c) y por debajo de y= f(x) con c ≤ x ≤ 3 es igual al área por debajo de y= f(c) y por encima de la curva con 0 ≤ x ≤ c

33) Suponga que el consumo de leña de una nación está dado por $76e^{0.03t} m^3 / año$ y el crecimiento de nuevos árboles está dado por $50 - 6e^{0.09t} m^3 / año$. Calcule e interprete el área entre las curvas para 0 ≤ t ≤ 10.

34) Si se arroja una piedra desde una cierta altura y en el instante t la velocidad es *v*(*t*) = 9,8 *t* + 8 m/s ¿ Qué distancia recorre en los primeros 3 segundos?

35) Un móvil se mueve con movimiento rectilíneo, si su velocidad en cada instante t es $v(t) = t^2 - 4t$ metros por segundo determine: su posición en función de *t,* y la distancia recorrida durante los primeros 4 segundos.

36) Supóngase que fluye agua hacia un depósito a razón de $V(t)$ lts/min, donde $f(t)$ es positiva y continua dada, si Q_0 es la cantidad de agua en el depósito en el instante $t = 0$, probar que la cantidad de agua en el depósito en un instante posterior $t>0$ es :

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t V(x)dx$$

37) Si la aceleración de un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo es $a(t) = 2(t-1)$ m/seg^2, si su posición inicial fue de 3m, y su velocidad inicial, de 2m/seg, determine para cada t posterior, su velocidad $v(t)$ y la distancia recorrida durante los primeros 2 segundos.

Apéndice

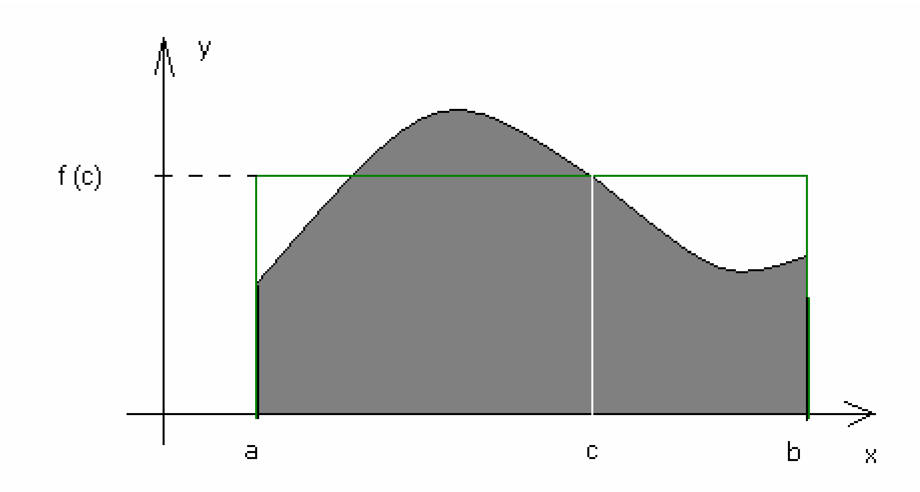
Aplicación del Teorema del Valor medio del Cálculo Integral:

Recordamos el T.V.M. del Cálculo Integral:

H) $f(x)$ continua en $[a,b]$ $\Rightarrow$ T) $\exists\, c \in [a,b] / f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

<u>Interpretación geométrica:</u>

El área bajo la curva (área gris) es igual al área del paralelogramo de base (b-a) y de altura $f(c)$, siendo *c* algún punto del intervalo $[a,b]$



Ejemplo:

Sean las funciones: $f(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$
$g(t) = B\,cos(\omega t + \beta)$

Sea $h(t) = f(t)g(t)$

Hallar el valor medio $Av(h)$ de la función $h(t)$ en un período de la función.

El valor medio de la función $h(t)$ es:

$Av(h) = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt$ donde *T* es el período de la función.

Comenzamos por hallar la función $h(t)$:

$$h(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)B\,cos(\omega t + \beta) = AB\,cos(\omega t + \alpha)cos(\omega t + \beta) =$$
$$= \frac{AB}{2}\left[cos\,(2\omega t + (\alpha + \beta)) + cos(\alpha - \beta)\right]$$

(Nota: $cos\;x\;cos\;y = \frac{1}{2}\left[cos(x + y) + cos(x - y)\right]$)

Luego: $\boxed{h(t) = \frac{AB}{2}\left[cos\,(2\omega t + (\alpha + \beta)) + cos(\alpha - \beta)\right]}$

Podemos llamar: $\varphi = \alpha - \beta$ y resulta:

$$\boxed{h(t) = \frac{AB}{2}\left[cos\,(2\omega t + (\alpha + \beta)) + cos(\varphi)\right]}$$

El período *T* de esta función es : $T = \frac{2\,\pi}{2\,\omega} = \frac{\pi}{\omega}$

$$\boxed{Av\,(h) = \frac{1}{\pi/\omega}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{AB}{2}\left[\cos\,(2\omega t + (\alpha + \beta)) + \cos\,(\varphi)\right] dt}$$

Resolviendo la integral, resulta:

$$Av(h)=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left[cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)+cos(\varphi)\right]dt=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\left[cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)\right]dt+\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}cos(\varphi)dt\right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{sen(2\omega t+(\alpha+\beta))}{2\omega}\Big|_0^{\pi/\omega}+\frac{\pi}{\omega}cos\,\varphi\right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\left(sen(2\pi+(\alpha+\beta))-sen(\alpha+\beta)\right)+\frac{\pi}{\omega}cos\,\varphi\right]=$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\frac{AB}{2}\left[\frac{\pi}{\omega}cos\,\varphi\right]$$

Luego:

$$\boxed{Av(h)=\frac{AB}{2}cos\,\varphi}$$

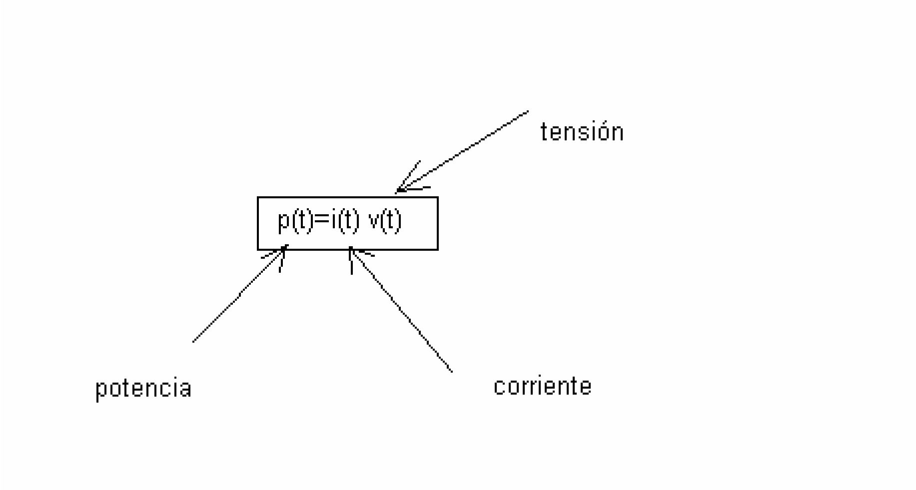
Donde φ es el defasaje entre las funciones $f(t)$ y $g(t)$

Si cambiamos el nombre de las funciones: $f(t)=i(t)$
$g(t)=v(t)$
$h(t)=p(t)$

Resulta: p(t) = i(t) v (t)

Si consideramos a *i(t)* como la corriente, *v(t)* la tensión, resulta *p(t)* la potencia en un circuito de corriente alterna; φ es el defasaje entre la corriente y la tensión.

$$\boxed{p(t)=\frac{I_M V_M}{2}\left[cos\left(2\omega t+(\alpha+\beta)\right)+cos(\varphi)\right]\ ,\quad \text{Potencia eléctrica}}$$

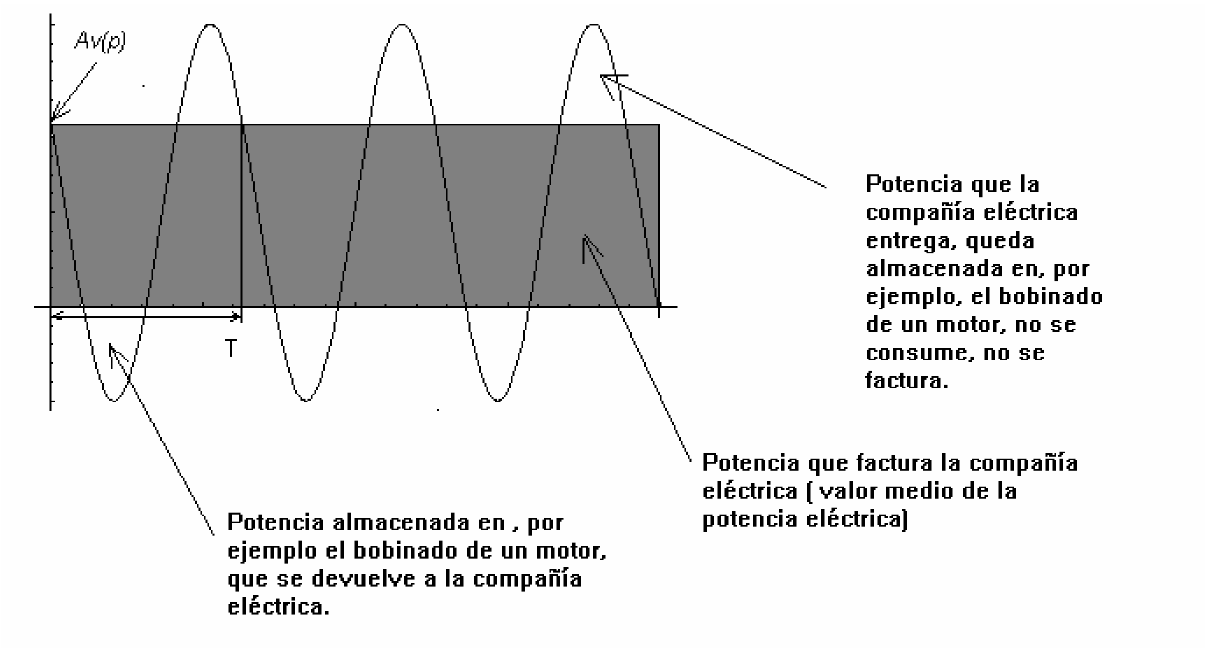


Y el valor medio de la potencia resulta: $Av(p) = \frac{I_M V_M}{2} cos\,\varphi$

Donde: $A = I_M$ es la amplitud de la corriente

$B = V_M$ es la amplitud de la tensión

Graficamos la potencia eléctrica y su valor medio:



Práctica 7 (Integrales impropias)

1) ¿Se verifica que $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{5}{6}$?

2) Determinar si las siguientes integrales son impropias justificando la respuesta. En caso afirmativo indicar su especie.

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4-1}\,dx$ c) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \frac{sen\,x}{x}\,dx$ d) $\int_{0}^{\pi/2} (\sec x - tg\,x)\,dx$

e) $\int_{0}^{1} \frac{1}{2x^2-3x-2}\,dx$ f) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1-2\,sen\,x}\,dx$ g) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$ h) $\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

3) Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias utilizando la definición, en el caso que C V indique a que valor

a) $\int_{0}^{+\infty} \frac{arctg\,x}{x^2+1}\,dx$ b) $\int_{0}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ c) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)}\,dx$ d) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x} sen\,x\,dx$

e) $\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-3x^2}\,dx$ f) $\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\,dx$ g) $\int_{0}^{1} \ln x\,dx$ h) $\int_{0}^{+\infty} \ln x\,dx$

i) $\int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx$ j) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-2|}\,dx$ k) $\int_{0}^{+\infty} sen x\,dx$ l) $\int_{0}^{+\infty} (2+sen x)\,dx$

4) a) Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcular los valores principales de las mismas

a.1) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x}\,dx$ a.2) $\int_{-8}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

a.3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ a.4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ con $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & si\ x>1 \\ x & si\ |x|\le 1 \\ \frac{1}{x^3} & si\ x<-1 \end{cases}$

b) Visualizar en un gráfico las respuestas de a)

5)

a) Verificar que $\int_{1}^{+\infty} [\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}]\,dx \neq \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx - \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx$

b) Interpretar geométricamente.

6) Analizar para que valores de $k \in R$ las siguientes integrales son convergentes:

a) $\int_0^{+\infty} e^{kx}\, dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\, dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{kx+3}{x^2+1}\, dx$

7) Utilizando el Criterio de Comparación analice la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ b) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{5+\cos^2 x}{x^2+1}\, dx$ d) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+e^{5x}}\, dx$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x^2+e^{5x}}\, dx$ f) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ g) $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{x\, sen\, 3x}\, dx$ h) $\int_0^{2} \frac{1}{e^{3\sqrt{x}}\sqrt{x}}\, dx$

8) Dada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3$

a) Representarla gráficamente
b) Determinar, si es posible, el área de la región limitada por la gráfica de f y su asíntota horizontal con $x \geq 0$.Interpretar en un gráfico
c) Determinar, si es posible, el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, los ejes coordenados y la asíntota vertical .Interpretar en un gráfico.

9) Dada . $f(x) = tg\, x . \sec x$, esquematizar y determinar si es posible el área de la región limitada por la gráfica de *f* , el eje x con $0 \leq x \leq \pi$

10) En una empresa se determinó que la recaudación en cada instante t está dada por $f(t) = t.e^{5-t}$ millones de pesos.

a) ¿En qué momento la recaudación de dinero será máxima?.
b) ¿Cuánto será lo recaudado hasta el instante $t = 10$?.
c) ¿Cuánto se recaudaría si el tiempo fuese ilimitado?. (suponer la variable t continua)

11) Por un caño circula agua que se deposita en un tanque de volumen 100m^3, a una velocidad instantánea de $V(t) = (t+1).e^{-0,1\,(t+1)}$ con $t \geq 0$ y expresado en m^3/seg. Se pide:

a) ¿Cuál es la cantidad de agua acumulada en los primeros 20 seg.?
b) Si la circulación de agua continúa indefinidamente. ¿Se desborda el tanque en algún momento?

Práctica 8 (Sucesiones y Series numéricas. Series de potencias)

Sucesiones numéricas

1) a) Si $a_1 = 1, a_2 = -1/3, a_3 = 1/5, a_4 = -1/7, ...$, hallar a_n

b) Si $b_1 = -1/2, b_2 = 1/2, b_3 = -3/8, b_4 = 1/4, ...$, hallar b_n

c) Si $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k}, c_{2k-1} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k}$ escribir los seis primeros términos de la sucesión si se sabe que $k \in N \wedge k \geq 5$

d) Definir por recurrencia la sucesión $(1,4,3,2,1,0,-1,-2,....)$.

2) Dada la sucesión de término general $a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in N$:

a) Completar el siguiente cuadro y represente gráficamente:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										
$\lvert a_n - 2 \rvert$										

b) De acuerdo con lo que se puede observar en la tabla ¿cuánto vale $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$?

c) ¿A partir de qué término se cumple que $\lvert a_n - 2 \rvert < \dfrac{1}{4}$?

d) ¿para qué valores de *n* se cumple que la distancia entre a_n y 2 es inferior a 0,1?

3) Demostrar que todos los términos de la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n \in N}$, salvo los diez primeros, están contenidos en el intervalo (0,9;1,1)

4) Calcular los límites de las sucesiones y verifique por definición sus resultados, si los términos generales son:

a) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ b) $\left(\dfrac{\lvert n-9 \rvert}{2n+5}\right)$ c) $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+3}\right)$ d) $\left(\dfrac{n^2+1+n}{3n^2+5n+1}\right)$

5) Sabiendo que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (NOTA: ver demostración en el apéndice)

Calcular:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{(2n+1)^5}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{n+n^2}$

6) Sabiendo que $\underset{n\to\infty}{lím}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \quad si \;\; a>1, k>0$ (la demostración de este límite se verá como aplicación del Criterio de D´Alembert en el tema Series numéricas ejercicio 29). Calcular:

a) $\underset{n\to\infty}{lím}\;\dfrac{n^4+3}{3^n+5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+9}{5n^2+3.2^n+7}$

7) Utilizar el teorema de intercalación para probar que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=a \quad si \quad 0<b\le a$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\ ...\ +\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+.....+\dfrac{1}{(2n)^2})=0$

8) Sabiendo que $(a_n)_{n\in N}=(1{,}52;1{,}522;1{,}5222;....)$:

a) Hallar $a_n=f(n)$

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

9) a) Escriba las hipótesis del criterio de Weierstrass que aseguran que la sucesión $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ tiene límite.(Verificación en el apéndice)

b) Teniendo en cuenta que $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ calcular:

a) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$ b) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{3n+2}$

c) Aceptando la siguiente propiedad:

"Si $(a_n)_{n\in N}$ es una sucesión tal que $\underset{n\to\infty}{lím}\,a_n=+\infty \;\; ó \;\; \underset{n\to\infty}{lím}\,a_n=-\infty$

entonces $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ " calcular

a) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ b) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^n \; con\, k\in R, k\neq 0$

c) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ d) $\underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n+5}$

10) Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si son verdaderas, deberán ser demostradas, si resultan falsas alcanza con dar un contraejemplo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0 \vee \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$

d) $\underset{n\to\infty}{lím} = +\infty \wedge \exists \;\; k \in R^+ / |b_n| \leq k \Rightarrow \underset{n\to\infty}{lím}(a_n b_n) = +\infty$

e) Toda sucesión monótona creciente es divergente

f) Toda sucesión acotada es convergente

g) Toda sucesión convergente es acotada

h) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \;\; \wedge \nexists \lim\limits_{n\to\infty} b_n \;\; \Rightarrow \;\; \nexists \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

11) Calcular los límites de las sucesiones, con $n \in N$:

a) $\left(\dfrac{3n^2+5}{4-5n^2}\right)$ b) $\left(\dfrac{3(n+1)!+n!}{n!-7(n+1)!-2}\right)$ c) $\left(\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+1}\right)$

d) $\left(\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\right)$ e) $\left(\dfrac{senn}{n}\right)$ f) $\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{4n-7}$

g) $\left(\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}\right)$ h) $\left(n\left[\ln(n+a)-\ln n\right]\right), a>0$

12) Determinar a y $b \in \Re$ de $f(n) = \left(\dfrac{an+b}{2n+1}\right)^{3n} \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = e^{-6}$

13) Sea $(a_n)/a_n = n \,.\, 2^{-n}$

a) Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n + 5)$

b) Sea $(b_n)_{n\in N} \big/ |b_n| \leq 3$, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$

c) Sea $(c_n)_{n\in N} / a_n \leq c_n \leq \dfrac{n^2+n+1}{2n^3-5}$, hallar $\lim\limits_{n\to\infty} (2+c_n)$

14) a) Analizar la existencia de los siguientes límites:

a) $\underset{n\to\infty}{lím}\; 2^n$	b) $\underset{n\to\infty}{lím}\; (1/2)^n$	c) $\underset{n\to\infty}{lím}\; (-2)^n$
d) $\underset{n\to\infty}{lím}\; (-1/2)^n$	e) $\underset{n\to\infty}{lím}\; 1^n$	f) $\underset{n\to\infty}{lím}\; (-1)^n$

b) Analice la existencia del $\underset{n\to\infty}{lím}\; q^n \;\; \forall q \in R$ (el resultado de este límite se utilizará para estudiar la convergencia de la serie geométrica)

Series numéricas

15) Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

a) Determinar la sucesión de sumas parciales recurriendo a la descomposición en fracciones simples

b) Calcular, aplicando la definición, si existe, la suma de la serie dada.

c) Utilizando la misma línea de razonamientos de a) y b), probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

16) Dadas las siguientes series geométricas, analizar si convergen, divergen u oscilan y, de ser posible, hallar su suma. Justificar.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-7)$ d) $\sum_{n=5}^{\infty}(-1)^{n+1}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$

17) Discutir la convergencia de las siguientes series numéricas usando la definición, series telescópicas o series geométricas. En el caso de que converjan determine sus sumas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{96}{2^{2n-1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{6^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+n^2}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{\sqrt{x}}\,dx$

18) Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $|q|<1$, indicar cuál es la suma de las siguientes series y qué condición debe cumplir *x*:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^n$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-x)^{n-1}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}(2x-3)^n$

19) Se deja caer una pelota desde una altura de 100cm. Cada vez que golpea el piso rebota a 2/3 de su altura anterior. Hallar la distancia total recorrida.

20) Usando las propiedades generales de las series y de las series geométricas y armónicas generalizadas; indicar, si es posible, si convergen o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{n}}-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2}$

d) $\sum_{n=5}^{\infty}\left(2+\frac{3}{n^3}\right)$ e) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-5)^n+(-2)^n}{10^n}$

21) Aplicando condición necesaria de convergencia, determinar si es posible, la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{3n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[5+2(-1)^n\right]^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cos n\pi)$ f) $\sum_{n=-1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^2}$

22) Si la suma de los *n* primeros números de una serie es $\dfrac{4n+1}{n+3}-\dfrac{1}{3}$, analizar la convergencia de la serie, calcular el término a_{20} y hallar el término general a_n. Justificar.

23) Sabiendo que la suma de los *n* primeros términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ es $S_n = \dfrac{5n^2-3n+2}{n^2-1}$, determinar el término a_6 y discutir la convergencia de la serie. Justificar.

24) De ser aplicables los criterios de comparación, discutir la convergencia, en cada caso, justificando:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[3+\frac{(-1)^n}{2n}\right]$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1/n)}{n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

25) Mediante el uso de condición necesaria o criterios de D'Alembert, de la raíz o de la integral, discutir la convergencia:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n-5}\right)^{2n+3}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+3}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n-1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

26) Discutir la convergencia de las series, empleando los métodos apropiados. Justificar:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n(n+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2+2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n+(-1)^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2(5n-1)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

27) Discutir la convergencia para todo $a>0$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n.\ n!}{n^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n\ .\ 2^n}$

28) Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ tal que $u_{2k}=\left(5/7\right)^k$; $u_{2k+1}=5\ \left(5/7\right)^k$

a) Verificar que D'Alembert no se puede aplicar.
b) Aplicar el criterio de la raíz y decidir si converge o no.

29) Como consecuencia del criterio de D´Alembert calcular los siguientes límites:

a) $\underset{n\to\infty}{lím}\ \dfrac{n^k}{a^n}$ con $a>1, k>0$ b) $\underset{n\to\infty}{lím}\ \dfrac{a^n}{n!}$ con $a>1$

30) Investigar si las series alternadas son convergentes ¿cuáles convergen condicional o absolutamente?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+10}$

31) Dadas las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$

a) Verificar que ambas series convergen y que su suma S verifica 0<S<1

b) Calcular en ambas S_9.

c) Encontrar una cota superior de $|S - S_9|$ en ambos casos. Interprete.

32) Determinar el conjunto de los números *r* para los cuales las series dadas son convergentes y analizar si la convergencia es absoluta o condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{r}{2}\right)^{3n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r+2)^n}{2n+1}$; c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2r)^n$

33) Se sabe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}6^n.a_n / a_n>0$ es convergente. Analizar la convergencia de las siguientes series, justificando la respuesta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-6)^n.a_n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5^n.a_n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n.a_n$

34) Encontrar todos los $\alpha\in R^+$ de modo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{n^2+1}{3^n}$ converja.

35) Encontrar todos los $\alpha\in N$ de modo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(\alpha n)!}$ converja.

36) Encontrar todos los $\alpha\in R$ de modo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^\alpha}{(3n)!}$.

Series de potencias- Serie de Taylor

37) Determinar radio e intervalo de convergencia, analizando los extremos.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+3)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n)!\,(x-3)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x-7)^n}{n\ .\ 3^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}.n^n}$

$g)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(x+2)^{4n}}{(n^2+1)}$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n(x+2)^{4n+1}}{(n^2+1)}$

38) Obtener las series de Mac Laurin y el intervalo de convergencia. Justificar.

a) $y=e^x$ b) $y=\operatorname{sen} x$ c) $y=\cos x$

d) $y=\dfrac{1}{1+x}$ e) $y=\ln(1+x)$

39) Decir si las siguientes igualdades son verdaderas. Justificar

a) $\ln(1,2)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(0,2)^n}{n}$ b) $\ln(3)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n}$

40) Usando los desarrollos anteriores y las propiedades de series de potencias, hallar los desarrollos de Mc Laurin de las siguientes funciones e indicar el intervalo de convergencia:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{2-3x}$

d) $f(x)=e^{-3x}$ e) $f(x)=sen\ (\pi x)$ f) $f(x)=\ln(1+4x)$

g) $f(x)=x\,e^{-2x}$ h) $f(x)=ch\ x$ i) $f(x)=\cos^2 x$

j) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ k) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ l) $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$

m) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen\ x}{x} & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$

41) Recurriendo a la descomposición en fracciones simples y teniendo en cuenta desarrollos de series conocidas, obtener la serie Mac Laurin de $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$.

42) Usando desarrollos en serie, calcule:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

Dada una sucesión de término general a_n se llama ***función asociada a la sucesión*** a una función f de variable real, continua y tal que $f(n) = a_n$

43) Probar que la sucesión $a_n = \frac{\ln n}{n}$ es decreciente con n>2 (sugerencia: estudiar crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ mediante el signo de f')

Propiedad:

Sea f (x) la función asociada a la sucesión a_n

1-Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

2- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

44) Utilizando la propiedad anterior calcular

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^4}$

45) ¿Es posible aplicar la propiedad anterior para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\pi$? justifique

Aplicaciones

46) La función potencial del campo de fuerzas gravitatorio es inversamente proporcional a la distancia $r = R + h$ del objeto al centro de la Tierra, siendo *R* el radio de la Tierra (supuesta esférica) y *h* la altura del objeto respecto de la superficie terrestre, y con esta expresión se debería calcular la energía potencial gravitatoria. Sin embargo, el cálculo de dicha energía se realiza a partir del producto *P.h* (*P* peso del objeto), o sea directamente proporcional a la altura *h*. Usted puede explicar esta aparente contradicción basándose sobre los conceptos estudiados hasta aquí.

47) Consideremos un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio r. Al unir los vértices con el centro de la circunferencia, obtenemos n triángulos congruentes. Cada ángulo central mide $\frac{2\pi}{n}$

a) probar que el área de cada triángulo es $\frac{1}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$

b) Llamando S_n a la suma de las áreas de los n triángulos, calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$ e interpretar el resultado geométricamente.

Apéndice

I) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Se mostrará que la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ está acotada superior e inferiormente por dos sucesiones cuyos límites son iguales a 1. A partir de este resultado el teorema del intercalación o del "sándwich" asegurará que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

i) Como $n \geq 1 \to a_n = \sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1 = b_n$ (sucesión constante)

ii) Como $\sqrt[n]{n} \geq 1$ entonces puede expresarse $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ para algún $h \in R_{\geq 0}$

entonces

$$a_n = \sqrt[n]{n} = 1 + h \to n = (1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \ldots\ldots + h^n \geq \frac{n(n-1)}{2!}h^2$$

por binomio de NEWTON **(ver (#))**

como todos los sumandos son positivos se puede acotar inferiormente con uno solo de ellos

por transitividad de la desigualdad se tiene que:

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2 \to \frac{2n}{n(n-1)} \geq h^2 \to \frac{2}{n-1} \geq h^2 \to \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq h \to c_n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq 1 + h = a_n$$

SI $n > 1$

por lo tanto: $1 = b_n \leq a_n \leq c_n = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

y como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ y $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 1$

0 SI $n \to \infty$

el teorema de intercalación asegura que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

OBSERVACIÓN: Binomio de Newton

$(x+y)^1=x+y$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ sus coeficientes forman el:

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+ 4xy^3+y^4$

....

generalizando se obtiene:

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1 \quad n \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad n \quad 1
\end{array}$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y+ \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2+.........+ \frac{n(n-1)}{2!} x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n$$

Esta igualdad se la conoce como Binomio de Newton y puede escribirse como:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$ donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (número combinatorio)

y puede demostrarse formalmente utilizando el Principio de Inducción Matemática.

En la demostración se usó para el caso particular de **x=1 y y=h**

II) Demostrar que la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite

Se probará que la sucesión:

i) Es monótona creciente

ii) Está acotada superiormente

de i) y ii) por el Teorema de Weierstrass se tendrá que existe $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\{a_n : n \in N\}$. A dicho límite se lo bautiza como el **<u>número e</u>**

Demostración de i): se quiere probar que:

$\forall n \in N : a_{n+1} \geq a_n$ lo que es equivalente a: $\forall n \in N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ por ser $a_n > 0 \ \forall n \in N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right).\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{n} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^{n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right).\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n} =$$

$$= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\underbrace{\frac{-1}{(n+1)^2}}_{h}\right)^{n} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+n.\frac{-1}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right) =$$

DESIGUALDAD DE BERNOULLI

$(1+h)^n \geq 1+nh$

$\forall n \in N, h > -1$

$$= \frac{n+2}{n+1}.\frac{n^2+2n+1-n}{(n+1)^2} = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+2n^2+n^2+2n+n+2)}{(n+1)^3} = \frac{(n^3+3n^2+3n+1)+1)}{(n+1)^3} =$$

$$= \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} = 1+\underbrace{\frac{1}{(n+1)^3}}_{>0} \geq 1.$$

por lo tanto se probó que $\forall n \in N : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ lo que muestra que la sucesión es ***monótona creciente***.

Demostración de ii)**:** se quiere probar que $\exists K \in R : \forall n \in N : a_n \leq K$

desarrollando el binomio de newton para el caso particular de $x = 1 \wedge y = \dfrac{1}{n}$ se tiene:

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1}\dfrac{1}{n} + \dbinom{n}{2}\dfrac{1}{n^2} + \dbinom{n}{3}\dfrac{1}{n^3} + \dbinom{n}{4}\dfrac{1}{n^4} + ... + \dbinom{n}{n}\dfrac{1}{n^n} =$ y desarrollando los números combinatorios y simplificando en cada sumando se obtiene:

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\frac{1}{4!}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}+.....+\frac{1}{n!}\frac{(n-1)(n-2).....(n-(n-1))}{n^{n-1}}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n}+.....+\frac{1}{n!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}......\frac{n-(n-1)}{n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+.....+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).....\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\le$$

como cada paréntesis verifica $0\le\left(1-\frac{r}{n}\right)<1$ con $1\le r<n$ se tiene:

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+......+\frac{1}{n!}\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+......+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Como $\forall n\in N: n!\ge 2^{n-1}$ o lo que es lo mismo $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$

(se demuestra utilizando el Principio de Inducción) al aplicar esta desigualdad a todos los sumandos a partir del 3er sumando se consigue:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+......+\frac{1}{2^{n-1}}}_{=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}_{\le 1}\le 1+2=3$$

(Por suma de los términos de una progresión geométrica)

Se terminó de demostrar que $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)\le 3\ \ \forall n\in N$ o sea es una sucesión ***acotada superiormente*** (y también inferiormente)

Por lo tanto por el Teorema de Weierstrass se tendrá que existe

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\operatorname{sup remo}\{a_n : n\in N\}.$$

A dicho límite se lo bautiza como el **número e**, el cual satisface que $2<e<3$

RESPUESTAS

<u>Práctica 5:</u> Primitivas

Primitivas-Propiedades

1)a) F b) V c) F d) V e) V f) V

2) a) $k\int f(x)dx$; b) $\int f(x)dx + \int g(x)dx$; c) $\int (f(x).g(x))' dx = f(x).g(x) + C$;

d) $\int f(g(x))d(g(x))$

e) $\int e^{f'(x)} d(f'(x)) = e^{f'(x)} + C$

4) a) $v(t) = \frac{5}{2}t^2$; b) $x(t) = \frac{5}{6}t^3 + 3$

Integrales Inmediatas

5) a) $x^2 + 3x + C$; b) $\frac{x^4}{2} - \frac{1}{12}x^3 + \sqrt{3}x + C$; c) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{5}{9}x^{9/5} - 3\ln|x| + C$

d) $\frac{x^5}{20} + \frac{3x^4}{16} - \frac{1}{2}x + C$; e) $\frac{-5}{2}x^{-2} + 3x^{2/3} + C$; f) $4e^x - 5\sin x - \frac{7}{2}x + C$;

g) $3arctgx + \cos x + C$ h) $2\arcsin x + x + C$; i) $\int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{x} + C$;

j) $tgx + \cot gx + C$

Integrales por sustitución

6) a) $\ln(e^x + 3) + C$; b) $-\frac{1}{2}\ln|3 + \cos(2x)| + C$; c) $\frac{-(\cos x + 3)^{''}}{11} + C$;

d) $\frac{5}{18}(\sin(3x))^{6/5} + C$ e) $\frac{\ln^2(x+2)}{2} + C$; f) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$; g) $\frac{-1}{2}\cos(x^2) + C$;

h) $\frac{2(e^{5x} + 3)^{3/2}}{15} + C$ i) $x + 5\ln|x - 3| + C$; j) $\frac{arctg^2 x}{2} + C$; k) $\frac{-\cos(2x-1)}{2} + C$;

l) $\frac{1}{\cos x} - 3tgx + C$ m) $\sin(\ln x) + C$; n) $\frac{2}{3}arctg\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

7) a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; b) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$; c) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$;

d) $\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

Integrales por partes

8) a) $xe^x - e^x = e^x(x-1) + C$; b) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$; c) $-(3+x)\cos x + \sin x + C$

d) $(4 - x^2)\sin x - 2x\cos x + C$; e) $\frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right] + C$;

f) $\frac{2}{3}x^2(x+2)^{3/2} - \frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}x(x+2)^{5/2} - \frac{4}{35}(x+2)^{7/2}\right] + C$; g) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

h) $x(\ln x-1)+C$; i) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$;

j) $2\left[x(2+x)^{1/2}-\frac{2}{3}(2+x)^{3/2}\right]+C$; k) $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x-\frac{1}{\ln 3}\right)+C$; l) $\frac{3}{10}e^{x/3}[\cos x+3\sin x]+C$

m) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; n) $\frac{-2}{3}x(2-x)^{3/2}-\frac{4}{15}(2-x)^{5/2}+C$

Fracciones simples

9) a) $\frac{1}{4}[\ln|x+2|+3\ln|x-2|]+C$; b) $-x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$; c) $\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$

d) $\frac{-6}{x+1}-\ln|x+1|+C$

e) $\frac{x^2}{2}-4x+\frac{8}{x+2}+12\ln|x+2|+C$

f) $\frac{\ln(x^2+1)}{2}-2arctgx+C$

g) $\frac{5}{9}\ln|x|-\frac{8}{3(x-3)}-\frac{5}{9}\ln|x-3|+C$

h) $-2\ln|x-1|+\frac{2}{x-2}+3\ln|x-2|+C$

i) $\frac{3}{13}\ln\left|\frac{x-2}{\sqrt{x^2+9}}\right|-\frac{2}{13}arctg\left(\frac{x}{3}\right)+C$

j) $\frac{1}{10}+\ln\left|\frac{x^5+1}{x^5-1}\right|+C$ $\quad(t=\ln x)$

k) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{e^x-2}{e^x+2}\right|+C$

l) $-\frac{1}{2}\ln|\ln x|+\frac{2}{3}\ln|-1+\ln x|-\frac{1}{6}\ln|2+\ln x|+C$

10) a) $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$; b) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-2arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$;

c) $\frac{2}{13}\ln|x-2|-\frac{1}{13}\ln|x^2+2x+5|+\frac{7}{26}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

11) a) $\frac{1}{3}\left(e^{3x}\sin(e^{3x})+\cos(e^{3x})\right)+C$ b) $(\sqrt{2x}+3)^{4/3}\left(\frac{3}{7}\sqrt{2x}-\frac{27}{28}\right)+C$ $\quad(t^3=\sqrt{2x}+3)$

c) $-\ln(2x)\cos(\ln(2x))+\sin(\ln(2x))+C$ d) $arctg(\sin x)+C$, $t=\sin x$

e) $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$ f) $\frac{-1}{2}\ln\left(1+e^{2/x}\right)+C$ $\quad\left(t=1+e^{2/x}\right)$

g) $3arctg(e^{2x})+C$ h) $\int 2x\ln^2(x^2+1)dx=(x^2+1)(\ln^2(x^2+1)-2\ln(x^2+1)+2)+C$

i) $\frac{1}{2}\ln|4-\cos^2 x|+C=\frac{\ln(7-\cos(2x))}{2}+C$ $\quad(t=7-\cos(2x))$

j) $\frac{-9}{2}\left(\frac{2-x}{3}\right)^{4/3}+\frac{27}{7}\left(\frac{2-x}{3}\right)^{7/3}+C$ k) $(2x^2+4x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)+(x^2+4x)+C$

l) $2\sqrt{x}-2\sqrt{3}arctg\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\right)+C$, $(t=\sqrt{x})$

12) a) $\frac{1}{2}arcsen(x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

b1) $2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}+C=2arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C=$

b2)

$$-2arcsen\left(\frac{2-x}{2}\right)-(2-x)\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{2}\right)^2}+C=-2arcsen\left(\frac{2-x}{2}\right)-\left(\frac{2-x}{2}\right)\sqrt{4x-x^2}+C$$

b3)

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}arcsen\left(\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}\right)-(2-x)\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}\right)^2}+C=-\frac{2}{\sqrt{3}}arcsen\left(\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}\right)-\left(\frac{2-x}{2}\right)\sqrt{12x-3x^2-8}+C$$

c1) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln(x+\sqrt{x^2+4})+C$

c2) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$

c3) $\frac{\sqrt{3}(x+2)}{2}\sqrt{(x+2)^2-4}-2\sqrt{3}\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-4}\right|+C$

Ecuaciones diferenciales

13) a) $y=kx$; b) $y^2+\cos(x^2)=k$; c) $y=-\frac{1}{x+\ln|x|+k}$; d) $y=k.\sqrt[4]{\left|\frac{x}{4-x}\right|}$

e) $y=ke^{-3x}+\frac{2}{3}$; f) $y=k\sqrt[3]{1+x^3}$

14) $y=kx$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

15) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ $\quad R: y^2-x^2=k$

16) $\frac{5y-y}{-x}=\frac{dy}{dx}$ Rta $y=\frac{6}{x^4}$

17) a) $T(t)=20-10e^{-t.\ln 2}=20-10.2^{-t}$; b) $T(t)=19 \rightarrow t=\frac{\ln 10}{\ln 2}$

18) $v(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$; $A(t)=4\pi r^2 t$

$\frac{dv(t)}{dt}=kA(t) \rightarrow 4\pi r^2(t)r'(t)=k4\pi r^2(t) \rightarrow \frac{dr}{dt}=k \rightarrow dr=k\,dt \rightarrow r(t)=kt+C$

$$\begin{array}{l} r(0)=\frac{5}{2} \\ r(30)=1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} k=-\frac{1}{20} \\ C=\frac{5}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} r(t)={}^{-t}/_{20}+{}^{5}/_{2} \\ r(t)={}^{1}/_{2} \rightarrow t=40\ min. \end{array}$$

<u>Práctica 6:</u> Integral definida y aplicaciones

Integral definida

1) a) 5 b) 8 c) $\pi/\ 2$ d) 4

2) a) $\frac{73}{4}-\frac{4}{\pi}$ b) 0 c) No d) $-\frac{11}{2}$

3) a) -2 b) 4 c) 0 d)6

4) a) 8 b) 5 c) 10 d) 0

5)

a) $\begin{array}{l} F(4)=4 \\ F(7)=3 \end{array}$

b) $F(x)=\begin{cases} x & si\ 0\le x\le 4 \\ \frac{-x^2}{2}+5x-8 & si\ 4<x\le 6 \\ -x+10 & si\ \ 6<x\le 7 \end{cases}$

6)

a) $F_1(x)=\begin{cases} -x-1 & si -1\le x<0 \\ 2x-1 & si\ \ 0\le x\le 4 \\ \frac{x}{2}+5 & si\ \ 4<x\le 6 \end{cases}$

b) $F_2(x)=\begin{cases} -2x-2 & si -1\le x\le 0 \\ \frac{x^2}{2}+3x-2 & si\ \ 0<x\le 2 \end{cases}$

c) No es el área de la región limitada por $y=f_1(x)$, el eje x y con $-1\le x\le 5$

d) Es el área de la región limitada por $y=f_1(x)$, el eje x y con $-1\le x\le 5$

7) c1) $F'(2)=126e^{-14}$ c2) $F'(0)=0$

8) Si porque $F''(0)=0$ y además en x=0 presenta un cambio de concavidad.

9) $f(x)=\frac{e^{2x}(1+2x)}{1+e^{-x}}$

10) $f(1)=-\frac{\pi}{2}$ $\quad f(4)=\frac{\pi}{2}$

11) $H(x)=\frac{1}{2}arctg(sen\,x)$ Observar que la constante de integración es nula porque $H(0)=0$ por el enunciado

12) $p(x)=1+4(x-1)+(2-2\pi)(x-1)^2$

13)

a1) $-\frac{5}{2}$ a2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^4$ a3) $\ln\left(\frac{12}{7}\right)$ a4) π

b) a1) y a2) NO y a3) y a4) SI

14)a) $f(c)=1, c=\pm\sqrt{3}$; b) $f(c)=\frac{2+2\pi}{\pi}$, $c=arcsen\,(2/\pi)$

c) $f(c)=2+2\ln(3)$ $\quad c_{1,2}=1+\ln(3)\pm\sqrt{\ln^2(3)+2\ln(3)-3}$

16) a)F b) F c) F, f no es acotada en $[-1;1]$ d)V

17) $\frac{32}{3}$

18) a) $\frac{16}{3}$ b) $2e^2+10ln10-33$ c) $\frac{1}{6}$

19) $--\frac{23}{3}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$ 20) $\frac{225}{8}$ 21) $2\ln\left(\frac{8}{5}\right)+\frac{3}{2}$

22) $\frac{7}{2}(1-e^{-1})$ 23) $\frac{4}{3}p^2$ 24) $\frac{71}{6}$

25) $a=\frac{81}{4}$ 26) $C=e$ 27) $a=\frac{1}{2}$

28) $\ln(4)$ 29) $a=\frac{4}{3}$

30) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ y $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 31) 2

32)a) $c=\sqrt{3}$ $\quad f(c)=3$ b) $A=2\sqrt{3}$

34) 68,1 m.

35) $x(t)=\frac{t^3}{3}-2t^2+C$

Distancia recorrida = $|x(4)-x(0)|=\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{32}{3}$ (expresada en metros)

37) $v(t)=t^2-2t+2$

Distancia recorrida =$|x(2)-x(0)|=\left|\frac{17}{3}-3\right|=\frac{8}{3}$ (expresada en metros)

Práctica 7: Integrales impropias

2) son impropias a) b) g) y h)

3) a) $\pi^2/8$ b) $256/15$; c) No CV d) $1/2$ e) $-1/6$ f) $1/48$
g) -1; h) No CV i) No CV j) 2 k) No CV l) No CV

4) a1) DV VP= $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ a2) CV a $-\frac{9}{2}$

a3) DV VP=0 a4) CV a $\frac{1}{2}$

6) a) k < 0 b) k > 1 c) k = 0

7) a) convergente b) convergente c) convergente d) convergente
e) convergente f) divergente g) divergente h) convergente

8) b) No es posible c) Es posible, la integral impropia converge a 5

9) No es posible

10) a) t = 1 b) $-11e^{-5} + e^{5}$ c) e^{5}

11) a) $-310e^{-2,1} + 110e^{-0,1}$ b) El tanque desborda

Práctica 8: Sucesiones y series numéricas. Series de potencias.

1) a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$; b) $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{2^n}$; c) $\{1/10, -1/5, -1/12, 1/6, 1/14, -1/7\}$
d) $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_n = a_{n-1} - 1$; $\forall n \geq 3$

2) b) 2 ; c) n ≥ 5 ; d) n ≥ 11

4) a) 0 ; b) ½ ; c) 1 ; d) 1/3 ;

5) a) 1 b) 1
6) a) 0 b) 0

8) a) $\dfrac{137}{90} - \dfrac{1}{45}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n = \dfrac{15}{10} + 2\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{10^{k+2}}$ b) $\dfrac{137}{90}$
9) a) e^3 ; b) e^3 ; c) a- e^{-1} b- e^{k} c- $e^{1/2}$ d- 1
10) a) Falso; b) Falso ; c) Falso ; d) Falso ; e) Falso ; f) Falso ; g) Verdadero ; h) Falso
11) a) – 3/5; b) – 3/7 ; c) 0 ; d) ½ ; e) 0 ; f) e^{-4} ; g) 0 ; h) a
12) a = 2 y b = - 3
13) a) 0 y 5 ; b) 0 ; c) 2
14) a) $+\infty$ b) 0 c) ∞ d) 0 e) 1 f) no existe

SERIES NUMÉRICAS

15) a) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, .. \forall n \in \mathrm{N}$

b) 1

16) a) converge a 3/2 ; b) converge a 1/24 ; c) divergente a -∞ ; d) oscilante

e) divergente

17) a) $S = 1/2$ b) $S = 1/256$ c) $S = 1/2$;d) $S = 1/6$ e) $S = 1$; f) divergente

18) a) $S = \frac{-1}{x+1} \quad con\ |x| \rangle 1$; b) $S = \frac{-x}{1+x} \quad con\ |x| \langle 1$; c) $S = \frac{1}{1-x^2}\ con\ |x| < 1$;

d) $S = \frac{1}{4-2x}\ con\ x \in (1;2)$

19) 5m

20) a) divergente b) no es posible c) divergente d) divergente e) convergente

21) a) no converge b) no es posible c) no converge d) no converge e) no converge

f) no es posible

22) S= 11/3 ; a $_{20}$ = 1/46 y a $_n$ = $\frac{11}{(n+3)(n+2)}$

23) La serie es convergente y a $_6$ = 2/105

24) a) convergente b) convergente c) No se puede aplicar el criterio de comparación d) divergente e) divergente f) convergente

25) a) convergente b) divergente c) divergente d) divergente e) convergente f) convergente g) divergente h) convergente

26) a) convergente b) divergente c) divergente d) divergente e) divergente

f) convergente g) convergente h) convergente i) convergente

27) a) a ‹ e convergente , a > e divergente

b) a‹ 2 convergente , a≥ 2 divergente

28) b) converge

30) a) convergente condicionalmente b) no converge c) convergente absolutamente

d) convergente condicionalmente.

32) a) convergente $|r| \angle 2$ b) convergente en $[-3\ ,-1)$ c) convergente en $(-1/2\ ,\ 1/2)$

33) a) absolutamente convergente b) convergente c) absolutamente convergente

34) $0 \langle \alpha \langle 3$

35) α ≥ 3

36) α ≤ 3

37) a) [- 3 , - 1] b) [- 1 , 1) c) x = 3 d) (2 , 5] e) [- 2 , 0] f) (-2 , 0)

g) $[-2 - \sqrt[4]{1/3}\ ,\ -2 + \sqrt[4]{1/3}\,]$ h) $[-2 - \sqrt[4]{1/3}\ ,\ -2 + \sqrt[4]{1/3}\,]$

38) a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$

b) $sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$

c) $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in R$

d) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad |x|\langle 1$

e) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad -1<x\leq 1$

40) a) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad |x|\langle 1$

b) $\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} \qquad |x|\langle 1$

c) $\frac{1}{2-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^{n+1}} \qquad |x|\langle 2/3$

d) $e^{-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{n!} \qquad x\in R$

e) $sen(\pi x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x\in R$

f) $\ln(1+4x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}x^{n+1}}{n+1} \qquad -1/4<x\leq 1/4$

g) $xe^{-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} \qquad x\in R$

h) $ch(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in R$

i) $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} \qquad x\in R$

j) $\frac{x}{x^2+4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^{n+1}} \qquad |x|\langle 2$

k) $\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1} \qquad |x|\langle 1$

l) $\int_0^x e^{-u^2}du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \qquad x\in R$

m) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \qquad x\in R$

41) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1+2(-1)^n)\ x^n \qquad |x|\langle 1$

42) a) ½ b) 2