ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Examen Final **05/12/2023**

APELLIDO DEL ALUMNO: ..... NOMBRE: .....

CORRIGIÓ: ..... REVISÓ: .....

1		2		3	4		5		CALIFICACIÓN

***Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta*.**
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos.

---

1) Sea el plano $\pi: kx + y + (k-2)z = 7,\ k \in \mathbb{R}$.

   a) Encontrar el valor real de k tal que el plano π y la recta $L_1: (x, y, z) = \lambda(-1, 2, 4)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ resulten paralelos. Luego, calcular la distancia entre la recta y el plano.

   b) Para $k = 1$, hallar el punto P perteneciente al plano π que se encuentre a menor distancia del punto $A(2,1,-1)$.

---

2) Sea T: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que el Núcleo de T es:
$Nu(T) = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0\}$.

   a) Si $\vec{a} = (-2, 2, k)$ y $\vec{b} = (1, -1, 2)$, indicar si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que $T(\vec{a}) = T(\vec{b})$.

   b) Indicar **si es posible** definir una transformación lineal F: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que el conjunto imagen de F sea igual al núcleo de T, o sea $Im(F) = Nu(T)$. Justificar.

---

3) Sea $S_1 = \{p(x) \in P_2[x] / p(0) = 0 \wedge p(2) = 0\}$ y $S_2 = gen\{x^2, 1\}$ subespacios del espacio vectorial $P_2[x]$. Hallar $S_1 + S_2$, una base y su dimensión.

---

4) a) Sea $z \in \mathbb{C}$. Graficar en el plano complejo el conjunto solución de:

$$\frac{|z+1|}{|z-2|} = 1$$

   b) Encontrar la matriz A si se sabe que sus autovalores son $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 5$ y $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son los autovectores en orden, de los respectivos autovalores.

---

5) Sea la superficie de ecuación $A(x-1)^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

   a) Hallar los valores de $A, B, C \in \mathbb{R}$ para que se cumpla simultáneamente que su traza con el plano xz sea una circunferencia y su traza con el plano xy sea la curva:
   $(x, y, z) = (1 + 2\cos(t), sen(t), 0)$ $t \in [0, 2\pi)$. Identificar y graficar a la superficie.

   b) Si $A = 0$, indicar los valores de B y C de manera tal que su traza con el plano $x = 0$ sea una hipérbola equilátera. Identificar a la superficie.

Respuestas:

1.a $k = 2, Dist(L_1, \pi) = \frac{7}{\sqrt{5}}$

1.b. $P(3, 2, -2)$

2.a $k = 5$

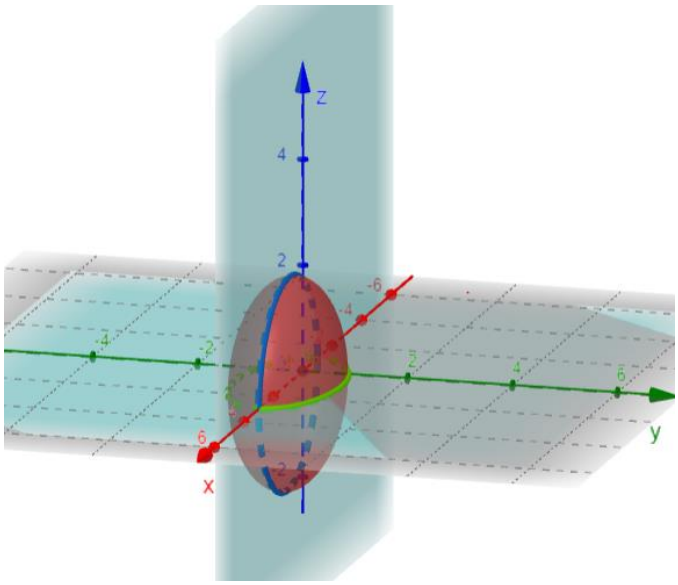
2. b Es posible, $Dim(\mathbb{R}^2) = Dim\left(Nu\ (F)\right) + Dim(Im(F))$

3. $S_1 + S_2 = P_2[x]$.

4.a $S = \left\{z = x + yi\ \in \mathbb{C}/x = \frac{1}{2}\right\}$

4.b $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

5.a Elipsoide de revolución $A = C = \frac{1}{4}\ B = 1$



5.b $B = -C, B \neq 0$