ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Examen Final 20/02/2024

APELLIDO DEL ALUMNO:.....**NOMBRE:**.....

CORRIGIÓ:..... **REVISÓ:**.....

1	2	3	4	5	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): 3 ejercicios correctamente resueltos.

---

1. Sea $\mathbb{L}$ la recta de ecuación $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 1) + (k, 2, 2)$ y π el plano de ecuación $2x - y = -1$.

(a) ¿Para qué valor real de k la distancia de $\mathbb{L}$ a π es igual a $\sqrt{5}$?

(b) Sea $\mathbb{L}_1$ la recta de ecuación $(x, y, z) = \mu(-1, 3, 3) + (-1, 2, 5)$. Para $k = 0$ determinar si $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}_1$ se intersecan. En caso afirmativo, calcular su intersección, en caso contrario calcular la distancia entre ellas.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal tal que $f(1, 1, 1) = x^2$, $f(1, 1, 0) = 1 - 2x$, y $f(1, 0, 0) = -2 + 4x$. Determinar el núcleo de f.

3. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

(a) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^T A = A$, entonces A es una matriz simétrica.

(b) Sean f y g dos transformaciones lineales de un espacio $\mathbb{V}$ en sí mismo. Si $w \in \mathbb{V}$ es un autovector de f y de g, entonces también es un autovector de la transformación $f + g$.

4. Sean $B = \{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}$ y $B' = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, -1, 0)\}$ dos bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ k & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Hallar todos los valores reales de k para los cuales $w = (1, 0, 1)$ es un autovector de f.

5. Sea $\mathcal{P}$ un paraboloide elíptico con vértice en el centro de coordenadas. Sabiendo que su intersección con el plano de ecuación $z = 3$ es la curva $\mathcal{C}$ dada por

$$\gamma(t) = (-3 \operatorname{sen} t,\ 6 \cos t,\ 3) \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

(a) Escribir la ecuación de $\mathcal{P}$ y graficarlo.

(b) Determinar las coordenadas de los focos de $\mathcal{C}$.