ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen final **20/02/2024**

Apellido y nombre:

Corrigió: **Revisó:**

T1	T2	P1	P2	P3	P4	Calificación

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta. No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas

Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).

T1. *a*) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Demuestre que si f es diferenciable en (x_0, y_0) entonces f es continua en (x_0, y_0) .

b) Determine si la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$ es diferenciable en el origen.

T2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. **Justifique su respuesta.**

a) El máximo de $f(x,y) = x - y$ en $D : \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\right\}$ vale 2 y se alcanza en el punto $\mathbf{X}_0 = (1, -1)$.

b) El área de la región $D : \begin{cases} x^2 + 3y^2 \leq 3, \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$, utilizando el cambio de variable $\begin{cases} x = \sqrt{3} r\cos(\theta), \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, está dada por la integral $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{\pi/4} \sqrt{3} r \, d\theta\right] dr$.

P1. Halle una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^2$, tal que el flujo del campo $\vec{f}(x,y,z) = (xg'(y),\ g'(y),\ g(y) - 2yz)$ a través de toda superficie esférica cerrada sea nulo y se verifique $\vec{f}(1,0,0) = (-2,-2,1)$.

P2. Sean $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 , $\vec{f}(x,y) = (x^2 - 3y,\ h(y))$ y C la curva formada por la unión de dos segmentos, uno de extremos $(0,0)$ y $(2,2)$ y el otro de extremos $(2,2)$ y $(4,0)$. Calcule la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C orientada de $(4,0)$ a $(0,0)$.

P3. Calcule la masa del cuerpo $V = \left\{(x,y,z) : x + z \leq 4,\ x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$ sabiendo que en cada punto de V la función densidad es proporcional a la distancia del punto al plano xy .

P4. Calcule la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (x^3 + 2y,\ y^6 - x - z,\ z^{12} + y)$ a lo largo del borde de la porción del **plano tangente a** $S : x^2y + y^3 + z^2 + z = 4$ en $\mathbf{P} = (1,1,1)$, que verifica la condición $x^2 + y^2 \leq 2y$. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo.