UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

UDB MATEMATICA

GUÍA DE EJERCICIOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Información general de la asignatura:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/analisis-matematico-ii-generalidades/

Programa de la asignatura:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/analisis-matematico-ii-programa/

Aula Virtual Repositorio:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/analisis-matematico-ii-aula-virtual/

Ejemplos de exámenes finales:

https://www.frba.utn.edu.ar/udb_matematica/examenes-tipo-analisis-matematico-ii/

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires

Departamento Materias Básicas
U. D. B. Matemática

Análisis Matemático II

Guía de Trabajos Prácticos

Esta guía pretende ayudar al alumno a incorporar las herramientas matemáticas correspondientes a la asignatura, que son imprescindibles para el estudio de una carrera de ingeniería. Para ello no alcanza con la simple repetición de procedimientos de cálculo, por lo tanto, en cada práctica se proponen ejercicios específicos, ejercicios integradores y cuestionarios que permitirán que el estudiante analice y asocie temas.

Con la primera práctica, *ecuaciones diferenciales–1° parte*, se realiza una introducción a las ecuaciones ordinarias de 1° orden (variables separables, lineales y reducibles a 1° orden), de manera de disponerlas para resolver situaciones que se van planteando en otras partes de la guía. En el TP-12 se completa el estudio del tema incorporando otros tipos de ecuaciones diferenciales.

La necesidad de familiarizarse con la aplicación de métodos computacionales nos impulsó a elegir uno de los utilitarios disponibles y hacer algunas menciones referidas a la forma de utilizarlo. Hemos optado por el Mathematica(*), que permite trabajar en forma simbólica y también numérica, disponiendo de funciones para generar distintos tipos de gráficos en dos y tres dimensiones, resolver sistemas de ecuaciones algebraicas y diferenciales, y varios paquetes especiales para aplicar en estadística, física, análisis frecuencial, etc.

Contenido

Ricardo O. Sirne, Miguel Albione, María Inés Cavallaro

(*) Mathematica es marca registrada por Wolfran Research, Inc.

Nomenclatura Básica

$\mathbb{R}$ o $\Re$	Conjunto de los números reales.
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros.
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales ($\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$).
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclídeo real n–dimensional ($n \in \mathbb{N}$). Los puntos de $\mathbb{R}^n$ pueden indicarse con X o $\overline{X}$, la línea sobre la letra indica $n > 1$; también pueden usarse letras minúsculas según convenga.
$X \cdot Y$	Producto interior (o escalar) entre elementos de IR^n.
$X \wedge Y$	Producto vectorial (sólo para vectores de $\mathbb{R}^3$).
$\Vert X \Vert$	Norma o longitud de $X \in \mathbb{R}^n$, $\Vert X \Vert = \sqrt{X \cdot X}$.
$E(A\ , r)$	Esfera o bola abierta con centro en A y radio $r > 0$.
$E(A)$	Entorno del punto A (conjunto que incluye alguna $E(A\ , r)$).
$f \in C^p(S)$	Indica que f tiene derivadas continuas hasta el orden p en todo punto de S, entendiéndose derivadas parciales para funciones de varias variables.
$\doteq$	Símbolo de "igual por definición"; por ejemplo: si $\overline{n} \neq \overline{0}$, $\breve{n} \doteq \overline{n} / \vert \overline{n} \Vert$.
$\subset$	Símbolo de inclusión en sentido amplio, $A = B \Rightarrow A \subset B$.
∂D	Frontera del conjunto D.
$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f'_x$	Derivada parcial de f respecto de la variable x .

Otra nomenclatura específica se indica en el comienzo de algunas prácticas.

Bibliografía

– ***Calculus vol. 2*** - T. M. Apostol - Ed. Reverté.

– ***Cálculo vectorial*** - C.P. Ruiz - Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana.

– ***Cálculo vectorial*** - J.E. Marsden, A.J. Tromba - Ed. Addison-Wesley Longman.

1 . Ecuaciones diferenciales – 1° parte

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- S.G. simboliza *solución general*, S.P. *solución particular*, S.S. *solución singular*.
- Las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de **orden *n*** son relaciones entre las variables que satisfacen a la ecuación diferencial; en especial, la S.G. debe contener ***n*** constantes arbitrarias esenciales.

01) Determine el orden y, si existe, el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias. Reconozca aquellas que son del tipo lineal.

a) $(y'')^2 - y''' = y - (y')^2$ c) $(1+x)(y'')^4 + 3\,y'''' + 5\,x^2 y = 0$ e) $3\,x\,dy - y\,dx = 0$

b) $y''' + x\,(y')^4 = 0$ d) $y'' - 3\,\text{sen}(y') + y = x^3$ f) $x\,y'' - 4\,y' + x - 1 = 0$

02) Verifique que:

a) $y = e^{-x} + x - 1$ es una solución de $y' + y = x$ que cumple con $y(0) = 0$.

b) $y = (2 - \ln(x))\sqrt{x}$ satisface la ecuación diferencial $4x^2 y'' + y = 0\ \forall x / x > 0$ y tiene recta tangente de ecuación $y = 2$ en el punto $(1,2)$.

c) $y^2 = C_1 x + C_2$ es S.G. de $yy'^2 + y^2 y'' = 0$. Halle la S.P. que en $(1, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 2x - 1$.

d) $y = x$ es una solución de $yy'^2 + y^2 y'' = x$.

e) $y = C\,x + C^2$ es S.G., $y = -x^2/4$ es S.S. de $y = x\,y' + (y')^2$. Halle las soluciones que pasan por $(2,-1)$.

f) $x^2 + 4y^2 = C$ es S.G. de $4\,y\,y' = -x$. Halle la S.P. que pasa por $(-2,1)$.

03) Halle la ecuación diferencial correspondiente a las siguientes familias de curvas:

a) $y^2 = 4\,a\,x$ c) $y = \text{sen}(a\,x + b)$ e) $y = C_1\,x + C_2\,x^{-1} + C_3$

b) $x^2 + y^2 = r^2$ d) $y = a\,e^x + b\,x\,e^x$ f) $y = b\,a^x$

04) Halle la ecuación diferencial de la familia de ...

a) ... rectas que pasan por $(1,-1)$.

b) ... hipérbolas con focos en el eje x, centro en el origen y semiejes a variable y $b = 1$.

c) ... circunferencias que pasan por el origen y tienen su centro en el eje x.

05) Dadas las funciones f, g derivables, se sabe que en general $(f\,g)' \neq f'\,g'$. Para el caso en que $f(x) = e^{x^3 + 2x}$, halle las funciones g para las que se cumple que $(f\,g)' = f'\,g'$.

06) Compruebe que todas las curvas de la familia $y = 1/(C - x)$ con $C \in \Re$, $x \neq C$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = y^2$. ¿Existe otra solución?, dibújelas y concluya.

07) Halle, según corresponda, la S.G. o la S.P. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y' = (x^2 + 1)/(2 - y)$ con $y(-3) = 4$ d) $x^2 dy = (x^2 + 1)dx/(3y^2 + 1)$ con $y(1) = 2$

b) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2\,x^2 y$ e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ con $y(4) = 2$

c) $y' = 2\,x\sqrt{y - 1}$ f) $y' = xy + x - 2\,y - 2$ con $y(0) = 2$

08) Halle la familia de curvas tales que en cada punto (x, y) tienen pendiente x / y.

09) Sea $\Im$ la familia de curvas tales que en cada punto tienen pendiente igual al producto de las coordenadas del punto, halle la curva de $\Im$ que pasa por $(0,-2)$.

10) Halle la familia de curvas tales que su recta tangente en cada punto ...
   a) ... pasa por (0,0)
   b) ... es horizontal.
   c) ... tiene ordenada al origen igual a la suma de las coordenadas del punto.
   d) ... tiene abscisa al origen igual al triple de la abscisa del punto.
   e) ... es normal a la recta que pasa por dicho punto y el origen de coordenadas.

11) Sea $\Im$ la familia de curvas tales que su recta normal en cada punto es tangente a la parábola de ecuación $y = k\,x^2$ que pasa por dicho punto. Halle la curva $C \in \Im$ que pasa por (0,1).

12) Halle las curvas que en cada punto tienen recta normal con ordenada al origen igual a 5.

13) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.
   a) $x\,y' - y - x^3 = 0$
   b) $y' + y\cos(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$
   c) $(x^2+4)\,y' - 3\,x\,y = x$, halle la S.P. tal que $y(0) = 1$
   d) $\dfrac{dy}{dx} - 2\,\dfrac{y}{x} = x^2\operatorname{sen}(3x)$

14) La ecuación diferencial $y' + 2\,x\,y = 6\,x$ puede resolverse como lineal de 1º orden o bien como de variables separables, verifique que por ambos métodos de resolución se obtiene la misma solución general (o formas equivalentes).

15) Halle la curva integral de $y' + y/(x+1) = \operatorname{sen}(x)$ que pasa por el punto $(\pi/2, 1)$.

16) Resuelva el problema de valor inicial $y' + y = 2\operatorname{sen}(x)$ tal que $y(0) = 1$.

17) Determine la posición x en función del tiempo t de un punto que se desplaza sobre una recta si ...
   a) ... su velocidad $v \doteq x'$ es constante (movimiento rectilíneo uniforme), siendo $x(0) = x_o$.
   b) ... su aceleración $a \doteq v' = x''$ es constante (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado), siendo $x(0) = x_o$ y $x'(0) = v_o$.

18) Sea un cuerpo cuya temperatura T es mayor que la temperatura T_A del ambiente que lo rodea, si T_A se mantiene constante la temperatura del cuerpo disminuye con una velocidad (dT/dt) que es proporcional a la diferencia $T - T_A$. Es decir, $dT/dt = -k\,(T - T_A)$ donde k es una constante positiva y t es el tiempo.(#)

   Suponga que en el instante inicial $t = 0$ la temperatura del cuerpo es $T_0 > T_A$, …
   a) … halle la expresión de la temperatura del cuerpo para $t \geq 0$.
   b) … demuestre que a medida que transcurre el tiempo ($t \to \infty$) la temperatura del cuerpo tiende a la del ambiente.
   c) … calcule el valor de k sabiendo que en 30 minutos y con una temperatura ambiente de 0 ºC la temperatura del cuerpo disminuyó a la mitad de su valor inicial.

(#) Ley de enfriamiento de Newton.

19) Verifique que las siguientes familias de curvas son ortogonales.

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = C_1 \\ y = C_2 x^4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 + \ln(\cos(2xy)) = C_1 \\ x^2 - y^2 + \ln(\operatorname{sen}(2xy)) = C_2 \end{cases}$

20) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada.

a) $y = 2x + C$ c) $y(Cx+1) = x$ e) $y = C \operatorname{sen}(2x)$

b) $y = Ce^x$ d) $y = \ln(x+C)$ f) $(x+y)^2 = kx^2$, $k > 0$

21) Determine a de manera que las familias $y^3 = Ax$ y $x^2 + ay^2 = B^2$ sean ortogonales.

22) Sea la familia de curvas de ecuación $y = Cx + C$, calcule la longitud de la curva de la familia ortogonal que pasa por (1,2).

23) Dada $xy'' - 2y' = 0$ halle la S.P./ $y(1) = y'(1) = 3$ aplicando la transformación $w = y'$.[(#)]

24) Halle la S.G. de $y'' - 2y' = x$.

25) Halle la S.G. de $y''' - y'' = 0$.

26) Si y_p es S.P. que pasa por (2,3) de $x^2 y'' - 2y = f(x)$, verifique que $y = x\, y_p$ es S.P. de la ecuación diferencial $xy'' - 2y' = f(x)$ que pasa por $(2,y_0)$. Halle y_0.

27) Sea $y = f(x)$ la S.P. de $x(x + y') = y$ que pasa por $(a,0)$ con $a > 0$, demuestre que f produce un máximo absoluto en el intervalo $[0,a]$; ¿cuál es el valor de dicho máximo?.

28) Dada la ecuación diferencial $(x^2 - 1)\, y' + x\, y(1-y) = 0$, …

a) … halle su solución general.

b) … verifique que existe sólo una solución que pasa por el punto $(3,2)$.

c) … verifique que por los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$ pasan infinitas soluciones.

29) Se sabe que $y = x^3 - x$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + \beta(x)\, y = 2x^2$, halle la solución de dicha ecuación que verifica $y(1) = 4$.

30) *Optativo*: Halle las soluciones de $x^2 (y')^2 - y^2 = 0$ que pasan por (1,1).

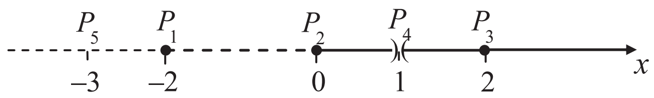
31) *Optativo*: Halle la solución general que se indica en el ítem "02) c)".

[(#)] Transformación de *reducción de orden*, útil cuando en la ecuación diferencial no figura la y.

2 . Nociones de Topología – Funciones

01) Sea $f\ : D \subset \Re \to \Re \ /\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x\,(x+2)^4}}{x-1}$ donde D es el dominio natural de f.

En el siguiente gráfico se indican los puntos $P_1, P_2, P_3 \in D$ y $P_4, P_5 \notin D$. Para cada uno de esos puntos indique si es punto interior, exterior o frontera de D; también indique si es punto aislado de D y si es punto de acumulación de D.



Nota: Observe que $D = \{x \in \Re \ /\ x = -2 \ \vee\ 0 \le x < 1 \ \vee\ x > 1\}$.

02) Sea $S = \{(x,y) \in \Re^2 \ /\ 0 < x^2 + y^2 < 4 \ \vee (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0\ \}$ el conjunto que se representa sombreado en la figura de la derecha. Observe que el punto $(0,0) \notin S$, mientras que $A = (2,2)$ es un punto aislado de S.

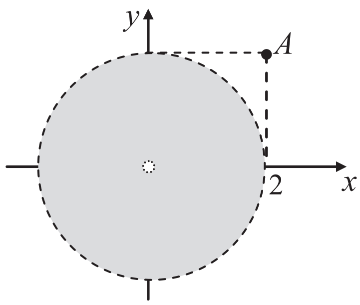
a) Halle la frontera (∂S) de S.

b) Halle el conjunto $\overset{\circ}{S}$ de puntos interiores de S.

c) Halle el conjunto S' de los puntos de acumulación de S, denominado *conjunto derivado* de S.

d) Analice si S es cerrado, abierto, acotado.

e) Halle el conjunto $Cl(S) = S \cup S'$ que se denomina *clausura* o *adherencia* de S.



03) Represente geométricamente los siguientes conjuntos de puntos. En cada caso indique cuáles son sus puntos interiores, frontera y exteriores, analice si el conjunto es cerrado, abierto, acotado, compacto, conexo.

a) $\{(x,y) \in \Re^2 \ /\ x^2 + y^2 - 4 \le 0,\ x + y \ge 1\}$.

b) $\{(x,y) \in \Re^2 \ /\ 4x^2 + 7y^2 \le 2,\ x \ge 0\}$.

c) $\{(x,y) \in \Re^2 \ /\ x^2 - y^2 \le 3,\ x + y \ge 2\}$.

d) $\{(x,y,z) \in \Re^3 \ /\ x^2 + y^2 = a^2 \ \wedge\ x^2 + z^2 = a^2 \ \wedge\ a > 0 \ \wedge\ x, y, z \in \Re_0^+\}$.

e) $\{(x,y,z) \in \Re^3 \ /\ x^2 + y^2 < z^2 \ \wedge\ x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

04) Verifique que $S = \{(x,y) \in \Re^2 \ /\ x\,y \le 4\}$ es cerrado y conexo, pero no es convexo.

05) En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función.

a) $f(x,y) = \ln(\,(x+1)\,(y-2x)\,)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (\sqrt{1-x}\,, (x+1)^{-1/2}, \ln(y-x))$.

c) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

d) $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z-x-y)}$.

e) $f(x,y) = \ln(x\,y) / \sqrt{2-x-y}$.

f) $\bar{f}(x,y) = (x^{-2}, (x+y)^{-2}\sqrt{y}\,)$.

g) $f(x,y,z) = (x\,y+z)/\sqrt{1-y}$.

h) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-x)/(2x-x^2-y^2)}$.

i) $f(x,y) = \int_x^y (1+t^2)^{-1}\,dt$.

j) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(\,x/(x+y)\,)$.

06) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

a) $f(x,y) = x\,y - 2$.

b) $f(x,y) = e^{x\,y}$.

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

d) $f(x,y) = |\,x\,| + y$.

e) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

f) $f(x,y) = x/(x^2 + y^2)$.

g) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{|z|}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

07) Para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en su dominio natural:

- determine el conjunto imagen,
- halle el conjunto de positividad,
- represente la gráfica en el espacio xyz y analice las intersecciones con los planos coordenados.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

d) $f(x,y) = 2 - x - y$.

e) $f(x,y) = 2 - x^2$.

f) $f(x,z) = x^2 - 2\,x + z^2$.

08) Proponga un campo cuyo dominio natural $D \subset \mathbb{R}^2$ cumpla con:

a) $x^2 + y^2 > 1$. b) $x^2 + y^2 \leq 8 - 2x$. c) $-1 \leq x + y < 3$. d) $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 0$.

09) Dibuje los siguientes conjuntos de puntos e indique si tienen algún nombre en especial:

a) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = x^2 - 2y^2\}$.

b) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z^2 - x^2 - 4y^2 = 1\}$.

c) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1\}$.

d) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = |x|\}$.

e) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x + y = 4\}$.

f) $S = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ z = \text{sen}(y)\}$.

10) Grafique el conjunto imagen de:

a) $\bar{g}(u) = (\cos(u), \text{sen}(u))$ con $u \in [0, \pi]$.

b) $\bar{g}(u) = (\cos(u), \text{sen}(u), u)$ con $u \in [0, \pi]$.

11) Sea C la línea que resulta de la intersección de la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con el plano de ecuación $z = x$ en el 1° octante.

a) Dibújela.

b) Halle una ecuación vectorial.

c) Halle ecuaciones para las líneas resultantes de proyectar C sobre los planos coordenados; analice en forma vectorial y en forma cartesiana.

12) *Optativo*: Dado el conjunto $S = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \ \vee \ (n^{-1},0),\ n \in \mathbb{N}\}$, halle sus puntos interiores, sus puntos aislados, su frontera, su conjunto derivado y su clausura.

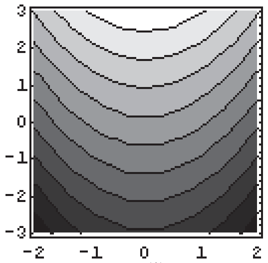
Cuestionario

1. Defina campo escalar y campo vectorial.
2. Defina gráfica y conjunto de nivel.
3. Calcule la longitud de la poligonal de vértices en (1,2,3), (2,4,6), (3,6,7), en ese orden.
4. Analice si $\{(x,y) \in \Re^2 / x\,y < 0\}$ es un $E(\bar{0})$.
5. Demuestre que si $f(x,y) = a$ y $f(x,y) = b$ con $a \neq b$ son dos conjuntos de nivel de f, dichos conjuntos no tienen puntos comunes.

Ejemplos de graficación de conjuntos de nivel en $\mathbb{R}^2$ usando el Mathematica

Para graficar líneas de $f(x,y) = 2\,y - x^2$ en el intervalo $[-2,2] \times [-3,3]$ podemos ordenar:

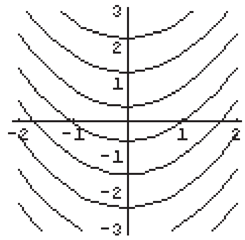
ContourPlot[2 y – x^2, {x, 2,2}, {y, –3,3}**]**;



En este caso –por defecto(*)– dibuja algunas líneas, sombrea y dibuja un marco externo.

Mismo ejemplo especificando opciones:

ContourPlot[2 y – x^2, {x,–2,2}, {y, –3,3},
Contours–>8, ContourShading–>False,
Frame–>False, Axes–>True,
AxesOrigin–>{0,0}**]**;



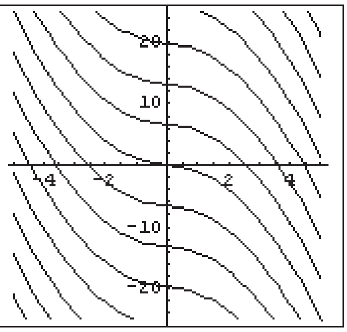
Opciones especificadas: Contours → 8 (dibuja 8 líneas), ContourShading → False (no sombrea), Frame → False (sin marco externo), Axes → True (con ejes), AxesOrigin → {0,0} (intersección de ejes en (0,0)).

Para las líneas de nivel de $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 + y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, definimos

f[x_,y_] : = x^2 + y^2 /; x > = 0
f[x_,y_] : = x^2 + y^2 /; x < 0

Con la siguiente orden se obtiene el gráfico de la figura:

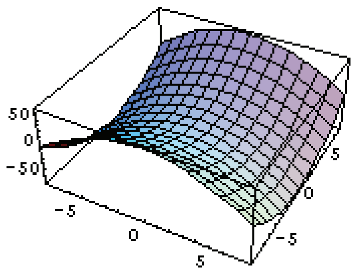
ContourPlot[f[x,y], {x,–5,5}, {y,–25,25}, Contours–>15, Axes–>True, ContourShading–>False, Frame–>False, AxesOrigin–>{0,0}**]**;



Otros ejemplos de graficación con el Mathematica

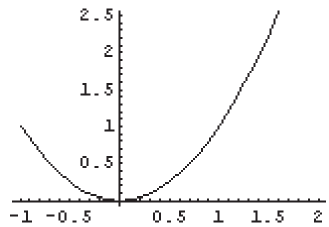
Superficie de ec. $z = y^2 – x^2$ en $[-8,8] \times [-8,8]$:

Plot3D[y^2–x^2, {x, –8,8}, {y, –8,8}**]**;



Conjunto imagen de $\bar{g}(t) = (\,t\,,\,t^2\,)$ con $t \in [-1,2]$:

ParametricPlot[{t , t^2} , {t, –1, 2}**]**;



(*) Las especificaciones "por defecto" son las que aplica el utilitario sin indicación adicional; para modificar estas especificaciones están las opciones seleccionables con el formato Especificación–>Opción elegida.

3. Límite y Continuidad

01) Analice la existencia de los siguiente límites de funciones escalares de una variable.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{|x|}$. c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$. d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x\geq 0 \\ x^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$.

02) ¿Por qué existe el $\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\text{sen}(u)}{|u|}, u\ln(u)\right)$ pero no existe el $\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\text{sen}(u)}{|u|}, u\right)$?.

03) Analice la existencia del $\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{1-\cos(u)}{u^2}, 1+2u, \frac{\text{sen}(u^2)}{u^3+u^2}\right)$.

04) Represente el conjunto imagen de las siguientes funciones vectoriales de una variable e indique en qué casos dicho conjunto es una curva.

a) $\bar{g}:\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(t)=(t, 2t)$

b) $\bar{g}:[-1,2]\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(u)=(u, |u|)$

c) $\bar{g}:[0,\pi]\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(\varphi)=(\cos(\varphi), \text{sen}(\varphi))$

d) $\bar{g}:\Re\to\Re^3 \,/\, \bar{g}(t)=(t, 2t, 1-t)$

e) $\bar{g}:D\subset\Re\to\Re^2 \,/\, \bar{g}(x)=(x, x^2)$ con $D=\{x\in\Re \,/\, |x|>1\}$

f) $\bar{g}(u)=\begin{cases}(u,u^2+1) & si\ u\geq 0\\ (u,u^2) & si\ u<0\end{cases}$

05) Analice la existencia de los siguientes límites de campos escalares.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3y-xy^3}{x^4-y^4}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y^2}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^{-y/x^2}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (y^3+1)\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$

n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\,\text{sen}(1/x)\cos(1/y)$

o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y)=\begin{cases} x^3/(x^2-y^2) & \text{si } x^2-y^2\neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2-y^2=0 \end{cases}$

p) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y)=\begin{cases} x\,y & \text{si } y\ge x \\ x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{y}) & \text{si } y<x \end{cases}$

q) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ si $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)/(x^2+x\,y+y^2) & \text{si } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

06) *Optativo*: Sea $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{sen}(x\,y)}{\ln(1-x^2)}$

a) Halle el dominio natural D de f y grafíquelo.

b) Analice si existe el $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ para puntos $(a,b)\in\partial D$ (frontera de D).

07) Analice la existencia de los siguientes límites.

a) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y-z}{x+y+z}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+y-2}{x-y}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{\mathrm{sen}(4-xy)}{16-x^2y^2}$

d) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy\,z}{x^3+y^3+z^3}$

e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\,,\ \frac{e^{xy}-1}{xy}\right)$

f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x\,\mathrm{sen}(1/y)\,,\ \frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)$

08) Sea S la superficie de ecuación $z=x^2+y^2$, halle la ecuación de una curva $C\subset S$ que pase por el punto $(1,2,5)$. Verifique por definición que realmente se trata de una curva.

09) Sea C la curva de ecuación $\overline{X}=(t\,,\,t^2,\,2t^2)$ con $t\in\Re$.

a) Exprese C como intersección de dos superficies.

b) Demuestre que C es una curva plana.

c) Dada la superficie de ecuación $\overline{X}=(u+v,\ u-v,\ u^2+u+v^2-v+2u\,v)$ con $(u,v)\in\Re^2$ demuestre que C está incluida en ella.

10) Analice la continuidad en el origen de los siguientes campos escalares.

a) $f(x,y)=\begin{cases} x^3/(x^2+y) & \text{si } x^2+y\ne 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y=0 \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{sen}(y)\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{si } (x,y)\ne(0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,y) \end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2-4x^2}{y-2x} & \text{si } y\ne 2x \\ 1-x-y & \text{si } y=2x \end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } |y|\ne|x| \\ 0 & \text{si } |y|=|x| \end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2}{x+y} & \text{si } x+y\ne 0 \\ 0 & \text{si } x+y=0 \end{cases}$

h) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(2+x^2)\,\mathrm{sen}(y)}{y} & \text{si } y\ne 0 \\ 2 & \text{si } y=0 \end{cases}$

11) Analice la posibilidad de redefinir la función extendiendo su dominio por continuidad.

a) $\bar{f}: \Re^2 - \{\bar{0}\} \to \Re^2 \;/\; \bar{f}(x, y) = (x^2, x y^2)/(x^2 + y^2)$.

b) $f(x, y) = x \operatorname{sen}(x y)/y$ si $(x, y) \neq (x, 0)$.

c) $\bar{g}: \Re^+ \to \Re^3 \;/\; \bar{g}(t) = \left(\dfrac{t}{|t|} \,,\, t \ln(t) \,,\, \dfrac{1 - \cos(t)}{t} \right)$.

d) $\bar{g}(u) = (\sqrt{u^2}/u \,,\, \sqrt{u}\,)$ si $u > 0$.

12) Determine el conjunto de puntos del plano para los cuales f es continua y realice la representación geométrica de la gráfica de f.

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ si $y \le 0 \wedge x^2 + y^2 \le 4$, $f(x, y) = 0$ $\forall$otro (x, y).

b) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$, $f(x, y) = 1$ si $(x, y) = (0,0)$.

13) Sea $f(x, y) = x^3/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. a) Demuestre que f es continua en el origen. b) ¿Puede analizar el límite acercándose al origen por la línea de nivel 1 de f?.

14) Sean $\bar{f}$ y $\bar{g}$ de $\Re^3$ en $\Re^3$ campos vectoriales continuos, demuestre que también son continuos los campos $h: \Re^3 \to \Re \;/\; h = \bar{f} \cdot \bar{g}$ y $\bar{w}: \Re^3 \to \Re \;/\; \bar{w} = \bar{f} \wedge \bar{g}$.

Cuestionario

1. Defina límite de un campo cuando $\overline{X} \to \overline{A}$ acercándose por una curva.
2. Indique un ejemplo de campo escalar con una discontinuidad evitable.
3. Indique un ejemplo de campo escalar con una discontinuidad esencial.
4. Demuestre que toda función escalar continua y no nula en un punto, mantiene su signo en un entorno de dicho punto.
5. Indique un ejemplo de campo escalar que tenga límite, aún con límites sucesivos no existentes.
6. ¿Puede hallarse un ejemplo como el anterior pero para límites por curvas?

Ejemplo de graficación con el Mathematica

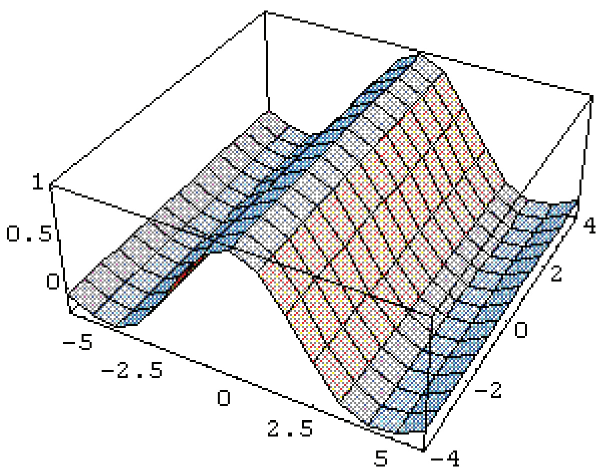
Orden para graficación:

Plot3D[Sin[x]/x, {x, –6,6}, {y, –4,4}**]**;

Comentarios:

Estamos graficando $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ en el intervalo [–6,6] x [–4,4].(*)

Como en la expresión de la función no figura la variable y, la forma correspondiente a sen(x)/x se “repite” para todo valor de y. Si se considera $f(0,y) = 1$, este es un ejemplo de superficie cilíndrica.



(*) Si en el gráfico el sistema no incluye puntos del tipo (0, y, f(0,y)), el utilitario no indica errores. Es interesante agregar la opción PlotPoints–>25 y observar el resultado (Plot3D usa 15 por defecto).

4. Derivabilidad – Recta tangente y plano normal

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Trabajando con funciones de varias variables:
  - $f'(\overline{A},\overline{r}) \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \overline{r}}(\overline{A})$ simbolizan la derivada de f respecto de $\overline{r}$ en el punto $\overline{A}$.
  - Siendo $\overline{r} \neq \overline{0}$, su dirección viene dada por $\breve{r} = \overline{r}/\|\overline{r}\|$; las componentes de $\breve{r}$ son los cosenos directores de la dirección. La derivada de f respecto $\breve{r}$ (vector unitario o versor) también se denomina "derivada direccional" o "derivada en la dirección de $\overline{r}$".
  - Las derivadas parciales son derivadas direccionales en la dirección de los versores canónicos; es decir,

$$f'(\overline{A},\breve{e}_k) \equiv f'_{x_k}(\overline{A}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{A})$$

  donde $\breve{e}_k = (\underbrace{0,\cdots,0,1}_{k},0,\cdots,0)$ es el k-ésimo versor canónico.

- Una derivada queda definida cuando el límite correspondiente existe y tiene norma finita, entendiéndose que:
  - para funciones de una variable la derivada $f'(a)$ se estudia suponiendo que a es interior al dominio de f. (*)
  - en el caso de funciones de varias variables, $f'(\overline{A},\breve{r})$ se estudia suponiendo que f está definida en un entorno de $\overline{A}$ sobre la recta que pasa por dicho punto con dirección $\breve{r}$; es decir, no es necesario que $\overline{A}$ sea interior al dominio de la función.

01) Definida la curva C como intersección de dos superficies S_1 y S_2 $(C = S_1 \cap S_2)$:
- parametrícela convenientemente y halle una ecuación para la recta tangente a C en $\overline{A}$,
- halle una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial para el plano normal a C en $\overline{A}$,
- analice si C es una curva plana o alabeada.

a) $S_1 : y = x^2 \quad S_2 : y+z = 5 \quad \overline{A} = (2,4,1)$.

b) $S_1 : z = x^2 - y^2 \quad S_2 : z = x+y \quad \overline{A} = (2,1,3)$.

c) $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 8 \quad S_2 : z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \overline{A} = (0,2,2)$.

02) Dada C de ecuación $\overline{X} = (u^2, u-2, u+3)$ con $u \in \Re$, analice si su recta tangente en el punto $(9,1,6)$ interseca ...

a) ... al eje z.

b) ... a la superficie Σ de ecuación $z = x - 2y^2$.

c) ... a la línea de ecuación $\overline{X} = (v,\ 2v,\ 32v^{-1})$ con $v \neq 0$.

03) Halle la ecuación de un plano que contenga tres puntos no alineados de la curva C de ecuación $\overline{X} = (2\cos(t),\ 2\,\mathrm{sen}(t),\ t)$ con $t \in [0,2\pi]$. Demuestre que C es alabeada (no es plana).

(*) Las derivadas laterales en puntos frontera las consideraremos más adelante sólo cuando sean necesarias.

04) Halle las funciones derivadas parciales de 1º orden de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^4 + 2xy + xy^3 - 1$.

b) $f(x,y,z) = y\,e^{2x} + z\,e^{3y}$.

c) $f(x,y) = x\,e^{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x)$, $x \neq 0$.

e) $f(x,y) = \int_x^y e^{\operatorname{sen}(t)}\,dt$.

f) $f(x,y) = \int_x^{x^2+y^2} e^{t^2}\,dt$.

05) Analice por definición la existencia de las derivadas parciales de f en el punto $\overline{A}$; cuando sea posible verifique aplicando la regla práctica de derivación.

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$, $\overline{A} = (1,2)$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y & \text{si } x \geq 1 \\ 2x - y & \text{si } x < 1 \end{cases}$, $\overline{A} = (1,1)$.

c) $f(x,y) = \sqrt{x^4 + 2y^2}$, $\overline{A} = (0,0)$.

d) $f(x,y) = |x| + |y|$, $\overline{A} = (0,0)$.

06) Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Pruebe que f no es continua en $(0,0)$.

b) Pruebe que $f'(\overline{0},\breve{r})$ sólo queda definida para $\breve{r}$: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$.

07) Dada $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Demuestre que para todo $\breve{r} \in \Re^2$ la función es derivable en el origen, aun cuando g es discontinua en $(0,0)$.

08) Dada $h : \Re^2 \to \Re$ / $h(x,y) = x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{1}{3}}$

a) Demuestre que $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$ y que la únicas direcciones para las que existe derivada direccional son $\breve{e}_1$, $-\breve{e}_1$, $\breve{e}_2$ y $-\breve{e}_2$.

b) Verifique que h es continua en el origen.

09) Demuestre por definición que $f : \Re^2 \to \Re$ / $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

10) Dada $f(x,y) = 1 - x^2 + 2y^2$, calcule usando la definición la derivada direccional de f en el punto $\overline{A} = (1,-1)$ según la dirección del vector $\overline{v} = (3,4)$.

11) Estudie la derivabilidad en distintas direcciones en el punto $\overline{A}$ que se indica en cada caso.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy - x}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$, $\overline{A} = (0,1)$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } (x,y) \neq (0,y) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,y) \end{cases}$, $\overline{A} = (0,0)$.

12) Determine los dominios en los que quedan definidas las derivadas parciales de 1° y 2° orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (x\ln(y), y/x)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

d) $f(x,y,z) = xy\ln(yz)$.

13) Sea P una partícula que se desplaza en el espacio xyz según la trayectoria definida por $\bar{X} = 3t^2\,\breve{\imath} + (2-t)\,\breve{\jmath} + 2t^2\,\breve{k}$ con $t \geq 0$, t: tiempo en segundos. Si $x = y^2 + z$ es la ecuación de una superficie S :

a) calcule el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración de P en el instante que la partícula atraviesa a S.
b) calcule el tiempo que tardará P en llegar desde S al plano de ecuación $x - z + 2y = 7$.

14) Sea $L : \Re^n \to \Re$ ($n > 1$) una transformación lineal, aplicando la definición de derivada direccional demuestre que $L'(\bar{A},\breve{r}) = L(\breve{r})\ \forall \bar{A},\breve{r} \in \Re^n$.

15) Sea $f(\bar{X}) = \bar{k}\cdot\bar{X}$ con $\bar{k}$ constante; utilice la propiedad demostrada en el ítem anterior para obtener $\bar{k}$ sabiendo que $f'((2,1),(3,4)) = 2$ y $f'((3,5),(-1,1)) = 4$.

16) Dado $\bar{v}(x,y) = (y + x\,g(x), y^2)$, halle $g(x)$ para que $\bar{v}'_x \perp \bar{v}'_y$ con $\bar{v}(1,1) = (3,1)$.

17) Dada $f(x,y) = y^2 + g(x)$, halle $g(x)$ para que $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ si $f(\bar{0}) = 0$, $f'_x(\bar{0}) = 1$.

18) Para tiempo $t \geq 0$ dos puntos siguen trayectorias definidas por $\bar{X} = (t+1, g(t), 1+t^2)$ y $\bar{X} = (2t,\ g'(t),\ 2t^2)$ respectivamente, determine $g(t)$ sabiendo que en todo momento las trayectorias son paralelas y que en $t = 1$ ambos puntos coinciden en el $(2,2,2)$.

19) Verifique que $y = (x - at)^2 + (x + at)^2$ con a constante satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

denominada "ecuación de onda" o "ecuación de la cuerda vibrante", debida a D'Alembert.

20) Demuestre que $z = \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{senh}(y)$ satisface la ecuación bidimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

21) Sea $U = f(x,y,z)$ con f campo escalar que en cada punto (x,y,z) tiene un valor inversamente proporcional a la distancia desde el punto al origen de coordenadas; verifique que:

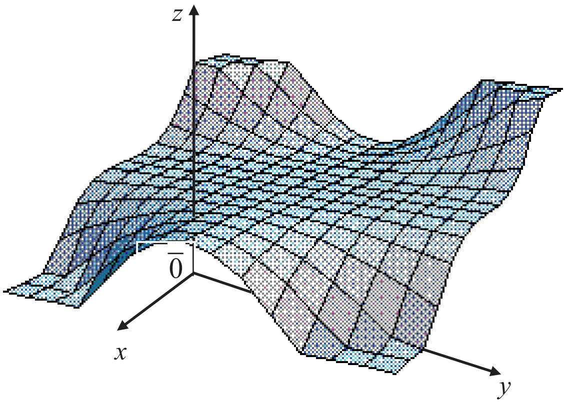
$$U''_{xx} + U''_{yy} + U''_{zz} = 0 \text{ en } \Re^3 - \{\bar{0}\}.$$

22) Sea $\bar{f} = (P, Q, R)$ / $\bar{f}(x,y,z) = \dfrac{k\,\bar{r}}{r^3}$ con k constante, $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\|$. Verifique que:

$$P'_x + Q'_y + R'_z = 0 \text{ en } \Re^3 - \{\bar{0}\}.$$

23) Dada $f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$, obtenga $f'_y(1,0)$ observando el gráfico de la curva intersección de $z = \sqrt{3-x^2-y^2}$ con $x = 1$.

24) En la figura se representa la superficie de ecuación $z = f(x,y)$; opine con fundamento si es posible afirmar que $f''_{xx}(0,0) = 0$ y $f''_{yy}(0,0) \le 0$.



Cuestionario

1. Exprese la definición de $f'''_{xyx}(a,b)$. 2. Siendo $f \in C^3(E(\overline{A}))$, aplicando el teorema de Schwarz demuestre que: $f'''_{xxy}(\overline{A}) = f'''_{yxx}(\overline{A})$ 3. Demuestre la propiedad de homogeneidad.	4. Si existe $f'(\overline{A},\overline{r})$, demuestre que existe $f'(\overline{A},-\overline{r})$ y $f'(\overline{A},-\overline{r}) = -f'(\overline{A},\overline{r})$. 3. Si $f:\Re^n \to \Re$ $(n>1)$ es una transformación lineal, justifique que: $f'(\overline{X},\overline{u}+\overline{v}) = f'(\overline{X},\overline{u}) + f'(\overline{X},\overline{v})$.

Derivando con el Mathematica

Sólo indicamos la forma de trabajar en aquellos casos en que se puede usar regla práctica de derivación. Definimos un campo escalar: f[x_,y_]= x^3 + x y D[f[x,y], x] devuelve 3 x^2 + y D[f[x,y], y] devuelve x D[f[x,y], {x,2}] devuelve 6 x D[f[x,y], x,x,y] devuelve $f'''_{xxy}(x,y)$.	Para funciones de una variable también se puede usar el formato g' , g'' (dos primas); por ejemplo, definiendo g[u_] = { u^2 , Sin[u] } D[g[u],u] o bien g'[u] devuelven {2 u , Cos[u]} Para calcular la derivada de la función f en (2,1) respecto del vector {3,4} debemos hallar h'[0] , donde h[t] = f[2+3 t, 1+4 t]; entonces podemos ordenar: D[f[2+3 t, 1+4 t], t] /. t $\to$0

5. Diferenciabilidad – Plano tangente y recta normal

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Dada $f:\Re^n \to \Re^m \;/\; f(X) = (f_1(x),\ \cdots,\ f_m(x))$, cuando f es derivable(*) en A, queda definida la matriz jacobiana de f en A que denotamos como $Df(A)$.

$$Df(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(A) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix}.$$

- Siendo f un campo escalar derivable en $\bar{A}$, el vector cuyas componentes son los elementos de $Df(\bar{A})$ se denomina gradiente de f en $\bar{A}$ y lo denotamos $\nabla f(\bar{A}) \equiv \operatorname{grad} f(\bar{A})$.

$$\nabla f(\bar{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{A}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{A}) \right).$$

- La expresión “f con matriz jacobiana continua en W ” es equivalente a “$f \in C^1(W)$”. Para funciones de una variable significa que la función f' es continua en W; para las de varias variables significa que todas las derivadas parciales de 1° orden son funciones continuas en W.

01) Exprese $Df(X)$ y halle el conjunto W tal que Df sea continua en W.

a) $\bar{f}(t) = (t^3 - 2\,, \frac{t^2-1}{t+1}\,, \frac{\cos(t)}{2t-\pi})$

d) $\bar{f}(\bar{X}) = \frac{k\breve{r}}{r^2}$ con $\begin{cases} \bar{r} = \bar{X} = (x,y,z) \\ r = \|\bar{r}\| \end{cases}$, $k =$ cte.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

c) $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+y\,,\ z\ln(x^2+z^2))$

f) $f(x,y) = (x^2y^3,\ (y-x)^2)$

02) Siendo $f(x,y) = \sqrt{xy}$ si $xy \geq 0$ y $f(x,y) = x$ si $xy < 0$, calcule $f'((0,0),(2,-1))$ aplicando la definición. Observe que en este caso $f'((0,0),(2,-1)) \neq \nabla f(0,0)\cdot(2,-1)$. ¿Existe la derivada pedida?; si existe, ¿cuál es su valor?.

03) Sea $f(x,y) = x^2/y$ si $(x,y) \neq (x,0)$ con $f(x,0) = 0$. Demuestre que f es derivable en toda dirección en $(0,0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

04) En los siguientes casos analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$, observe que f no es continua en (0,0).

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Verifique que en (0,0) la función tiene dos direcciones de derivada direccional máxima y cuatro direcciones para las cuales la derivada resulta nula (cada dirección se especifica mediante el versor correspondiente).

(*) Derivadas parciales existentes para el caso de función de varias variables.

05) Analice si la gráfica de f del ítem "01e" admite plano tangente en (0,0,0).

06) Dada la superficie de ecuación $z = e^{(x-1)^2+y^2}$, determine en qué puntos tiene plano tangente horizontal y obtenga la ecuación de esos planos.

07) *Optativo*: Siendo $f(x,y) = (x^3 - xy^2)/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, demuestre que f es continua y derivable en toda dirección en (0,0) pero no es diferenciable en (0,0).

08) Calcule mediante aproximación lineal y compare el resultado con el obtenido con calculadora.

a) $f(1.96, 0.96)$ cuando $f(x,y) = \sqrt{25 - 2x^2 - y^2}$.

b) $f(0.99, 1.98, 1.02)$ cuando $f(x,y,z) = xy + \mathrm{sen}(\mathrm{Exp}(2x - y + 3z - 3) - 1)$.

09) Demuestre que en un entorno del origen $e^{x/(y+1)} + \ln(y+1) \cong x + y + 1$.

10) Sea S la superficie de ecuación $\overline{X} = (u - v^2, v^2/u, u/v)$ con $(u,v) \in \Re^2 / \ uv \neq 0$, verifique que $\overline{A} = (-2, 2, 1)$ es un punto regular de S. Determine y exprese en forma cartesiana el plano tangente y la recta normal a S en $\overline{A}$.

11) Dada la superficie de ecuación $z = x^2 - xy^3 + x$, demuestre que todos sus puntos son regulares y halle aquellos puntos en los que el plano tangente es "horizontal" (paralelo al xy).

12) Sea r_0 la recta normal a la superficie de ecuación $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en $(1, 2, z_0)$, analice si existe algún punto en el que r_0 interseca a la superficie cilíndrica de ecuación $z = x^2$.

13) Halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de las siguientes funciones en el punto $\overline{A}$:

a) $f(x,y) = x^2 - xy^2$, $\overline{A} = (1,3)$. b) $f(x,y,z) = x^2 - yz^3$, $\overline{A} = (5,2,0)$.

14) Siendo $g(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$, calcule la derivada direccional de g en el punto $(1,2)$ según la dirección que forma con x^+ un ángulo –en sentido trigonométrico– de $\pi/3$.

15) Sea $f(x,y) = ax^2y^3 + bx^4 + 4xy$, determine a y b de manera que la derivada direccional de f en el punto $(1,-2)$ tenga el valor máximo en una dirección paralela al eje y .

16) La temperatura en ºC en cada punto (x,y,z) de un cuerpo es $T(x,y,z) = e^{2x+y+3z}$, ¿en qué dirección desde el origen se produce el mayor incremento de temperatura?.

17) Sea $f \in C^1$, si $f'(\overline{A},(3,4)) = 4$ y $f'(\overline{A},(2,7)) = -6$.

a) Calcule $f'(\overline{A},(5,9))$.

b) Determine el valor de la derivada direccional máxima de f en $\overline{A}$.

c) Sabiendo que $f(\overline{A}) = 3$, calcule en forma aproximada $f(\overline{A} + (0.01, -0.02))$.

18) La recta determinada por la intersección de las superficies de ecuaciones $y^2 = x^2 - z^2$ y $z = x$ es normal a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,0,1)$, calcule aproximadamente $f(0.98, 0.01)$.

19) Dada la superficie Σ de ecuación $z\,e^{y-2x} - 5 = 0$, halle una ecuación cartesiana para el plano tangente a Σ en $(1,2,z_0)$; con esta última calcule aproximadamente z_1 sabiendo que $(1.01, 1.97, z_1) \in \Sigma$.

20) Se sabe que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(1,2,z_0)$ es $2x+3y+4z=1$. Con esta información, ¿es posible calcular la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3,4)$?.

21) El resultado de la medición de una magnitud escalar w es del tipo $w_0 \pm \varepsilon_w$, donde w_0 es el valor medido y $\varepsilon_w = |\Delta w|_{\text{máx}}$ es la ***cota de error absoluto*** de la medición. Cuando $w = f(x_1,\cdots,x_n)$ y se miden los x_i para calcular w a través de f, una forma acostumbrada de evaluar ε_w es:

$$\varepsilon_w = \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}(A)|\ \varepsilon_{x_i}\ ,\ \text{donde } A = (a_1,\cdots,a_n),\ a_i \text{ es el valor medido para cada } x_i.$$

a) Sea $I = 0.50$ mA la intensidad de corriente eléctrica a través de un resistor y $V = 0.44$ Volt la diferencia de potencial entre sus terminales. Sabiendo que $R = V/I$ es la resistencia eléctrica del resistor, determine $R \pm \varepsilon_R$ considerando que Volt/mA = kΩ(*) y que ambos instrumentos tienen un error máximo de ± 1 en el dígito menos significativo (típico en instrumentos digitales).

b) Un recipiente tiene forma de cilindro circular recto, sus dimensiones internas son: diámetro 3.1±0.05 cm y altura 5.2 ± 0.05 cm. Calcule su capacidad $V \pm \varepsilon_V$.

c) Determine la cota de error relativo de z en función de los errores relativos de x e y en los siguientes casos: $z = xy$, $z = x/y$, $z = x^2y^3$. Nota: para $w \neq 0$, $\varepsilon_{\text{rel}_w} \doteq \varepsilon_w / |w|$.

d) Dados dos resistores con resistencia nominal $R_1 = R_2 = 39$ kΩ al 5% ($\varepsilon_{\text{relativo}}$ en % o *tolerancia*), calcule $R_{EQ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ (resistencia equivalente de dos resistores en paralelo); no olvide indicar la cota de error relativo de R_{EQ} en %.

Cuestionario

a) Demuestre que todo campo diferenciable es continuo y derivable en toda dirección.

b) Demuestre que $Df(A)$ es la matriz asociada a la transformación lineal que figura en la definición de diferenciabilidad de f en A.

c) Proponga un ejemplo de función de varias variables que resulte derivable pero no sea diferenciable en un punto interior a su dominio.

d) Determine los casos en los que $\Delta w = dw$.

e) *Optativo*: Sea $f(x,y) = x^{1/3}\sqrt{x^2+y^2}$, demuestre que f es diferenciable en (0,0) pero f'_x no es continua en (0,0).

(*) kΩ "se lee" kiloOhm, $1\,\text{k}\Omega = 1000\,\Omega$. mA "se lee" miliAmpere, 1 mA = 0.001 Ampere.

6. Funciones compuestas e implícitas

01) Dadas f y g, analice en cada caso si quedan definidas $f \circ g$ y $g \circ f$. Además, para cada función generada mediante la composición, determine su dominio natural y obtenga su matriz jacobiana en algún punto interior al mismo.

a) $\bar{f}(x,y) = (xy\,,\, x-y)$, $\bar{g}(u,v) = (u^2, v-u)$.

b) $f(x,y) = x\sqrt{y}$, $\bar{g}(u) = (u,\, 2-u)$.

c) $\bar{f}(x,y) = (x-y\,,\, \sqrt{x+y}\,)$, $\bar{g}(t) = (2-t,\, t-3)$.

d) $\bar{f}(x,y) = (xy^2, y-x,\, x)$, $\bar{g}(u,v,w) = (u-v,\, w\sqrt{1-u}\,)$.

02) Dada $h: D \subset \Re^2 \to \Re \,/\, h(x,y) = x\ln(1-xy)$ siendo D su dominio natural, defina dos funciones cuya composición genere h.

03) Si $z = 2uv - 2\sqrt{v-u}$ con $\begin{cases} u = x - y^2 \\ v = x + 2xy - 1 \end{cases}$, resulta $z = h(x,y)$.

a) Reconozca las funciones f y g que generan h como $h = f \circ g$.

b) Calcule la derivada direccional de h en (2,1), en la dirección que va hacia el (5,5).

c) Sea n_0 la recta normal a la gráfica de h en $(2,1,z_0)$, exprese n_0 como la intersección de dos superficies.

d) Analice si la recta n_0 mencionada en "c)" tiene algún punto en común con el eje z.

04) Dada $w = u^3 - xv^2$ con $u = x\sqrt{y-x} \wedge v = 2x + y^2$, resulta $w = f(x,y)$. Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas (sin realizar la composición), calcule $f'_x(0,1)$.

05) Dadas $f(u,v) = |u-1| - v$, $g(x,y) = (1+x^2, 2y-1)$, demuestre que $h = f \circ g$ es derivable en (0,0). ¿Se puede aplicar la regla de la cadena?.

06) Sea $z = f\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ con f diferenciable, calcule $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

07) Dada $h(x,y) = f(2x/y) - f(y/x)$ con $f \in C^1$, verifique que $x\,h'_x + y\,h'_y = 0$ para todo punto (x,y) tal que $xy \neq 0$.

08) Sean $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $\bar{g}(x,y) = (x+y,\, ay)$, determine el valor de a para que $h = f \circ \bar{g}$ en (1,1) tenga máximo crecimiento en la dirección del vector $\bar{v} = (5,7)$.

09) La temperatura en cada punto (x,y) de una lámina metálica plana es $T = 3x/(x^2+y^2)$.

a) Halle la línea de nivel (isoterma) que pasa por el punto $\bar{A} = (2,-1)$.

b) Halle la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en $\bar{A} = (2,-1)$.

c) Halle el coeficiente de variación de temperatura, $f'(\bar{A},\breve{r})$ con $\bar{A} = (2,-1)$, en la dirección de la bisectriz del 1º cuadrante con componente positiva según x.

d) Halle el coeficiente de variación de temperatura a lo largo de la curva C de ecuación $\bar{X} = (2\text{sen}(t), \cos(t))$ con $t \in [0,2\pi]$. Esto es dT/dt con $T = f(\bar{X})$ y $\bar{X} \in C$.(*)

e) Halle la cota de error relativo porcentual en el cálculo de T si se midieron $x = 2$ e $y = -1$ con cotas de errores relativos de 1% y 2% respectivamente.

(*) Observe que esta derivada, para funciones diferenciables, es proporcional a $f'(\bar{X},\breve{r})$ para $\bar{X} \in C$ y $\breve{r}$ versor tangente a la curva orientado según lo impone la parametrización de la misma.

10) La ecuación $xy - e^{z-x} = \ln(z)$ define implícitamente $z = f(x,y)$, halle una expresión lineal que permita aproximar los valores de f en un entorno del punto (1,1).

11) La ecuación $z^3 + 2xz + yz - x = 0$ define $z = f(x,y)$ en un entorno del punto $(1,-2)$.
   a) Determine $\nabla f(1,-2)$.
   b) Halle ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la gráfica de f en $(1,-2,z_0)$.
   c) Calcule las derivadas direccionales de f en $(1,-2)$, en las direcciones que forman ángulos de $\pi/3$ y de $-\pi/3$ medidos en sentido trigonométrico respecto de x^+.

12) Halle los puntos del hiperboloide de una hoja de ecuación $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $z = x - y$.

13) Dada $f(x,y,z) = 8x^2 - 2xy$, calcule la derivada de f en (3,1,2), en la dirección a la normal "interior" a $x^2+y^2+z^2=14$ en dicho punto.

14) Dada $f: \Re^2 - \{\bar{0}\} \to \Re \ / \ f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, calcule la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) de su dominio natural, en la dirección normal exterior(@) a la línea de nivel de f que pasa por dicho punto.

15) Sea $\bar{A}$ un punto de una superficie de nivel del campo escalar f y π_0 el plano tangente a dicha superficie en $\bar{A}$. Demuestre que la derivada direccional de f en $\bar{A}$ es siempre nula si se la calcula en la dirección que va desde $\bar{A}$ hacia cualquier punto $\bar{X} \in \pi_0$.

16) Siendo *C* la curva intersección de las superficies: $x^2 - y^2 = 12$ y $z = x + y^2$, analice si la recta tangente a C en $(4,2,z_0)$ corta a la superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$.(#)

17) Dada $z = u + v\,e^{u-v}$ con $(u,v) = (f(x,y),\, y^2)$ resulta $z = h(x,y)$. Halle las direcciones $\breve{r}$ tales que $h'((2,1),\, \breve{r}) = 0$, si la función f queda definida implícitamente mediante la ecuación $2y - ux - \ln(u) = 0$.

18) Halle la ecuación cartesiana del plano normal a la curva *C* en $\bar{A} = (2,1,-4)$ si se sabe que los puntos de *C* pertenecen a la superficie de ecuación $z = xy - 3x$, y que la proyección de *C* sobre el plano *xy* es la parábola definida por $y = x^2 - 3$ con $z = 0$.

19) Considere $h = f \circ \bar{g}$ con $\bar{g}(x) = (e^x, e^{x^2})$ y $f(u,v)$ definida por $y - 1 + \ln(yuv) = 0$. Demuestre que $y = h(x)$ con $h(0) = 1$ satisface la ecuación $(1+y)\,y' + (1+2x)\,y = 0$.

20) Verifique que $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $x + yz - e^z = 0$ satisface la ecuación que $z\,z'_x - z'_y = 0$.

21) Calcule la derivada direccional máxima de $h = f \circ \bar{g}$ en el punto (1,1) cuando $f(u,v)$ queda definida por $z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$, siendo $\bar{g}(x,y) = (xy^2,\ y - x^2)$.

(@) Hacia afuera de la región acotada que la línea encierra.

(#) Nota: Si $F, G \in C^1$ en un entorno de $\bar{A} \in \Re^3$, $F(\bar{A}) = 0$, $G(\bar{A}) = 0$ y el vector $\bar{d} = \nabla F(\bar{A}) \wedge \nabla G(\bar{A}) \neq \bar{0}$, la intersección de las superficies dadas implícitamente por $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$ define una curva regular en un entorno de $\bar{A}$ cuya recta tangente en este punto está dirigida por $\bar{d}$.

22) Dada $w = u^2 v + 3v^2$ con $\begin{cases} u = x + y^2 \\ v = g(x,y) \end{cases}$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule aproximadamente $h(2.98, 2.01)$ sabiendo que g queda definida por $x\,v + \ln(v + y - 2) - 3 = 0$.

23) La ecuación $u\,y + x + e^{2u+y+x-5} - 4 = 0$ define implícitamente $u = f(x,y)$, sabiendo que los puntos (x,y) pertenecen a la curva de ecuación $\overline{X} = (t^2 - 3,\ 2 + \operatorname{sen}(t-2))$ resulta que $u = h(t)$; verifique que h es decreciente en $t_0 = 2$.

24) Sea $f \in C^1$ con $\nabla f = (1,-1)$ constante, halle g derivable tal que $h(x) = f(x\,g(x),\, g(x))$ sea constante; suponga que la gráfica de g pasa por (3,1).

25) Halle $f(u)$ tal que $y = x\,f(x^2 - 1)$ sea solución de la ecuación diferencial $x\,y' - y = 2x^3$.

Cuestionario

a) Indique condiciones para que $f(x,y) = 0$ defina una curva plana que pasa por $\overline{A}$, ¿puede asegurar que la curva es regular en dicho punto?.

b) Sea $\nabla\varphi$ continuo en un entorno de $\overline{A}$ y no nulo en $\overline{A}$; demuestre que $\nabla\varphi(\overline{A})$ es normal al conjunto de nivel de φ que pasa por $\overline{A}$, y está orientado localmente hacia los conjuntos de nivel creciente.

c) Sea S una superficie regular en $\overline{A}$ y π_0 su plano tangente en $\overline{A}$. Demuestre que π_0 contiene a la recta tangente en $\overline{A}$ a cualquier curva regular $C \subset S$ que pase por dicho punto.

d) Proponga dos funciones discontinuas (no son continuas en todo punto) cuya composición genere una función continua y derivable en todo punto.

7. Polinomio de Taylor – Extremos

01) Sea $p(x,y) = x^2 - xy + y^3 - 3$ el polinomio de Taylor de 3° orden del campo escalar f en un entorno del punto (1,2).

a) Expréselo en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.

b) ¿Cuál es el valor de f en (1,2)?, ¿se puede calcular con el polinomio dado sin obtener la forma pedida en "a"?.

02) Dadas las superficies de ecuación $z = f(x,y)$ y $z = p(x,y)$, donde p es la función polinómica que resulta de desarrollar f en un entorno de (x_0, y_0) hasta el orden n, verifique que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.(*)

03) Desarrolle los siguientes campos por Taylor hasta 2° orden en un entorno de $\overline{A}$.

a) $f(x,y) = x - y\sqrt{6-x}$, $\overline{A} = (2,3)$.

b) $f(x,y) = y\ln(x) + x\ln(y-x)$, $\overline{A} = (1,2)$.

c) $f(x,y,z) = e^{xz} - (z+1)\sqrt{y-x}$, $\overline{A} = (1,2,0)$.

d) $f(x,y,z) = \cos(x+y)\,e^{z-x}$, $\overline{A} = (0,0,0)$.

04) Calcule en forma aproximada: a) $0.98^{2.01}$, b) $\sqrt{3.99} + \sqrt[3]{8.06}$, c) $8.97 / 3.02$.

05) Dada $f(x,y) = y\,g(x)$ con g derivable, halle $g(x)$ tal que en un entorno del punto (x_o, y_o) con $y_o \neq 0$ resulte $f(x,y) \cong g(x_o)(x + y - x_o)$.

06) Dada $f : \Re^2 \to \Re$, analice en cada caso si $f(0,0)$ es extremo local; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

a) $f(x,y) = 2 + \sqrt{|xy|}$. b) $f(x,y) = x^3 + xy^2$. c) $f(x,y) = (y - x^3)(x - y^2)$.

07) Siendo $f(x,y) = (x+y)^4$, demuestre que $f(-a,a)$ $\forall a \in \Re$ es extremo local en sentido amplio.

08) Estudie la existencia de extremos relativos (locales) y de extremos absolutos en sus dominios naturales de:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2$.

b) $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy$.

c) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$.

d) $f(x,y) = \ln(y-x)$.

e) $f(x,y) = \sqrt{10 - (x-4)^2 - (y-2)^2}$.

f) $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + z^3$.

09) Analice la existencia de extremos absolutos de $f(x,y) = x/(x^2 + y^2 + 1)$ en la región $D = \{(x,y) \in \Re^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 2x\}$, identifíquelos e indique en qué puntos se producen.

10) Demuestre que la gráfica de $f(x,y) = 6 + x^3$ tiene infinitos puntos con plano tangente horizontal, pero en ninguno de ellos el valor de f es un extremo.

11) Una chapa circular plana $S = \{(x,y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \le 4\}$ tiene una densidad de carga electrostática $\sigma(x,y) = 2xy^2 - x^2$ en μCoul/cm^2. Halle los puntos de máxima y mínima densidad de carga; no olvide analizar en puntos de la frontera.

12) Aplicando Taylor resulta $f(x,y) \cong 7x + y + xy - y^2 - 4x^2$ en un entorno de $\overline{A} = (1,1)$; analice si $f(\overline{A})$ es extremo local, en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

(*) En general, en (x_0, y_0) coinciden los valores de f y p y los de todas sus derivadas hasta el orden n inclusive.

13) Conectando en paralelo n resistores con resistencias eléctricas R_1, ..., R_n se obtiene una resistencia eléctrica equivalente R_{EQ} tal que $(R_{EQ})^{-1} = (R_1)^{-1} + \cdots + (R_n)^{-1}$. Sabiendo que R_1, ..., R_n son positivas, demuestre que R_{EQ} es menor que cada una de ellas (con lo cual es menor que la menor).

14) Dada $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $F(x,y,z) = 0$, suponga $F \in C^2$ y el punto $\overline{A} = (x_0, y_0, z_0) \,/\, F(\overline{A}) = 0 \wedge F'_z(\overline{A}) \neq 0$.
Demuestre que si (x_0, y_0) <u>es punto estacionario</u> de f entonces:
$$f''_{xx}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{xx}(\overline{A})}{F'_z(\overline{A})} \;,\; f''_{xy}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{xy}(\overline{A})}{F'_z(\overline{A})} \;,\; f''_{yy}(x_0,y_0) = -\frac{F''_{yy}(\overline{A})}{F'_z(\overline{A})} \,.$$

15) Aplicando el teorema de existencia de las funciones definidas implícitamente, demuestre que $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ define dos funciones φ_1 y φ_2 de las variables x e y que producen extremos relativos en (0,0); uno es máximo y el otro es mínimo. Halle las funciones correspondientes e interprete geométricamente.

16) Dada la superficie S de ecuación $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. Suponiendo una representación del tipo $z = \varphi(x,y)$, ¿en qué puntos φ produce extremos locales?, ¿es una única función φ?.

17) Analice la existencia de extremos relativos, clasifíquelos y calcule sus valores.
a) $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 + 12x^{-1} + 12y^{-1}$.
b) $f(x,y) = x - y^2 - x^3 + 2xy$.
c) $f(x,y) = (2 - 4x + 3y)^4$. Ejemplo con infinitos puntos de mínimo.
d) $f(x,y)$ definida implícitamente por $xy - z\cos(yz) + 1 = 0$.
e) $f(x,y,z) = xy + xz$ en puntos de la superficie de ec. $\overline{X} = (u, u - v, v^2)$ con $(u,v) \in \Re^2$.
f) $f(x,y,z) = z^2(x + 9) - 6y$ en puntos de la recta de ec. $\overline{X} = (2t, 4t, t)$ con $t \in \Re$.

18) Determine los puntos de la curva de ecuación $4y^2 - 18x + 9x^2 - 16y = 11$ más próximo y más alejado del punto (1,7).

19) Un cuerpo tiene forma de cilindro circular recto de volumen V, siendo A el área de su superficie frontera. Determine las dimensiones del cuerpo (diámetro y altura) si se desea ...
a) ... volumen máximo para área A dada.
b) ... área mínima para volumen V dado.

20) Se desea construir un camino de la menor longitud posible (recto) que permita unir dos rutas cuyas trazas locales tienen ecuaciones $4x + 4y = 5$ e $y = -x^2$, halle los puntos de ambas rutas a interconectar por dicho camino.

Cuestionario

a) La función del ítem 17a genera máximo local y mínimo local, observe que el máximo es menor que el mínimo. ¿Por qué pueden ocurrir estas situaciones?.

b) Proponga f tal que $f(x_0,y_0)$ sea mínimo local y el Hessiano sea nulo en (x_0,y_0).

c) Dada f diferenciable, si $f(x_0,y_0)$ es extremo local, demuestre que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es paralelo al plano xy.

d) Proponga una función de dos variables que produzca extremo local en un punto donde no es derivable.

8. Curvas – Integrales de línea – Función potencial

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Se denomina ***trayectoria*** o ***camino continuo*** a toda función $\bar{g}:[a,b]\subset\Re\to\Re^n$ $(n>1)$ continua en el $[a,b]$. El conjunto imagen $C\subset\Re^n$ es una ***curva***(*) con ecuación vectorial $\bar{X}=\bar{g}(t)\ \wedge\ t\in[a,b]$.
- La ecuación vectorial de una curva C impone una forma de recorrerla; la ***orientación***, o ***sentido de los arcos crecientes***, es aquella según la cual se desplaza $\bar{g}(t)$ sobre la curva cuando el parámetro *t* crece.
- Según la representación dada por $\bar{g}$, la curva C es ***regular*** cuando existe $\bar{g}'$ y $\bar{g}'(t)\neq\bar{0}$ en todo el $[a,b]$(**); si además $\bar{g}'$ es continua, la curva es ***suave***. Cuando C es suave, el versor tangente ($T=\bar{g}'/\|\bar{g}'\|$) se "desplaza" con continuidad sobre la curva.

  La curva es ***suave a trozos*** cuando el intervalo $[a,b]$ puede ser dividido en cantidad finita de intervalos cerrados en cada uno de los cuales $\bar{g}'$ es continua y no nula.
- $\int_C f\,ds$ simboliza la ***integral de línea*** del campo escalar f a lo largo de la curva *C*, siendo $ds=\|\bar{g}'(t)\|dt$ el *diferencial de arco de curva*.
- $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}\equiv\int_C \bar{f}\cdot d\bar{g}$ simboliza la ***integral de línea*** o ***circulación***(#) del campo vectorial $\bar{f}$ a lo largo de la curva *C*, siendo $d\bar{s}\equiv d\bar{g}\doteq T\,ds=\bar{g}'(t)\,dt$.

Observación:
Si *C* es suave y <u>simple</u> según dos representaciones $\bar{g}_1$ y $\bar{g}_2$, la $\int_C f\,ds$ tiene el mismo resultado usando cualquiera de ellas, mientras que se observará un cambio de signo en el resultado de $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}$ cuando $\bar{g}_1$ y $\bar{g}_2$ orienten a C en sentidos opuestos.

01) Dados los siguientes arcos de curva, halle dos parametrizaciones que los orienten en sentido opuesto y plantee el cálculo de su longitud verificando que el resultado no depende de la orientación.

a) Arco de parábola de ecuación $y=x^2$ entre los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.
b) Circunferencia de radio 2 con centro en (2,1).
c) Elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ con $a,b\in\Re^+$.
d) Segmento $\overline{AB}$, con $\bar{A}=(2,3,-1)$ y $\bar{B}=(3,2,1)$.
e) $C\subset\Re^3$, intersección de $y=x^2$ con $x+z=2$ en el 1° octante.
f) $C\subset\Re^3$, intersección de $x^2+y^2+z^2=8$ con $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
g) C: línea coordenada de $u=3$, correspondiente a la superficie de ecuación $\bar{X}=(u^2v\,,\,u-v\,,\,v+u)$ con $(u,v)\in\Re^2$ entre los puntos (9,2,4) y (18,1,5).

02) Calcule la longitud de la frontera de la región plana definida por: $x^2+y^2\le 4,\ y\ge x,\ x\ge 0$.

(*) A veces llamado *arco de curva* por estar definido en intervalo [*a*,*b*] cerrado y acotado.
(**) La derivabilidad en los puntos frontera del intervalo cerrado se cumple cuando existen las derivadas laterales (límite del cociente incremental por derecha para a y por izquierda para *b*).
(#) Algunos autores sólo llaman circulación al caso de *C* cerrada.

03) Calcule la longitud de la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la superficie de ecuación $z = x^2 - 4y^2$ desde el punto $(1,2,-15)$ hasta el (3,1,5), si la proyección de su recorrido sobre el plano *xy* es el segmento de puntos extremos (1,2,0) y (3,1,0).

04) Entre los puntos (0,0,0) y (1,1,1), en la intersección del plano $y = x$ con la superficie de ecuación $z = 2y - x^2$ con $z \geq 0$, se ha formado un hilo conductor eléctrico con resistividad lineal (Ω/m) que en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano $x = 1$. Calcule la resistencia eléctrica de dicho hilo conductor.

05) Halle las coordenadas del centro de masa de un alambre filiforme cuya densidad lineal en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z, si la forma del alambre queda determinada por la intersección de $x + y + z = 4$ con $y = 2x$ en el 1° octante.

06) Demuestre que si $\bar{h}: \Re \to \Re^n$ $(n > 1)$ es derivable y $\|\bar{h}\|$ es constante, $\bar{h} \perp \bar{h}'$.

07) Sea $C \subset \Re^3$ una curva suave de ecuación $\bar{X} = \bar{g}(t)$ con $t \in I$ (intervalo real).

Dado $b \in I$, $\boxed{s = \lambda(t) \doteq \int_b^t \|\bar{g}'(t)\|\, dt}$ es la ***abscisa curvilínea*** del punto $\bar{g}(t) \in C$, donde $s_b = \lambda(b) = 0$ es el origen de dicha abscisa.

Siendo $s' = \lambda'(t) = \|\bar{g}'(t)\| > 0 \;\Rightarrow\; \lambda$ estrictamente creciente $\Rightarrow\; \exists\, \lambda^{-1}$ tal que $t = \lambda^{-1}(s)$, componiendo con $\bar{g}$ resulta: $\boxed{\bar{X} = \underbrace{\bar{g}(\lambda^{-1}(s))}_{\bar{G}(s)} \text{ con } s \in I_s}$ que es la ecuación ***normal*** de C, donde I_s es la imagen de I a través de λ.

Se define el ***versor tangente principal*** $T \doteq d\bar{G}/ds$; aplicando la regla de la cadena y la regla de derivación de función inversa resulta:

$$T = \frac{d\bar{g}}{dt}\frac{dt}{ds} = \bar{g}'\,\frac{1}{s'} = \frac{\bar{g}'}{\|\bar{g}'\|} \tag{1}$$

versor orientado según $\bar{g}'$ (sentido de los arcos crecientes). Suponiendo existente y no nula la dT/ds, esta derivada es ortogonal a T ($\|T\|$ constante) y quedan definidos

el ***versor normal principal*** $N \doteq \dfrac{dT/ds}{\|dT/ds\|}$ y el ***versor binormal*** $B \doteq T \wedge N$.

Así como (1) permite hallar T sin obtener una ecuación normal de la curva, denotando: $s_o = \lambda(t_o)$ y suponiendo existentes $\bar{g}'_o = \bar{g}'(t_o)$, $\bar{g}''_o = \bar{g}''(t_o)$, $\bar{g}'''_o \doteq \bar{g}'''(t_o)$ es posible demostrar que en todo $\bar{X}_o = \bar{g}(t_o) \in C$, si $\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o \neq \bar{0}$ resultan:

$$\boxed{T_o = \frac{\bar{g}'_o}{\|\bar{g}'_o\|}\ ,\ B_o = \frac{\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o}{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|}\ ,\ N_o = B_o \wedge T_o}\,.$$

El ***triedro intrínseco*** de C en $\bar{X}_o$ está formado por los planos ***normal***, ***osculador*** y ***rectificante*** que son perpendiculares en dicho punto a T_o, B_o y N_o respectivamente.

La ***curvatura de flexión*** de C en $\bar{X}_o$ es:

$$\boxed{cf_o \doteq \left\|\frac{dT}{ds}(s_o)\right\| = \frac{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|}{\|\bar{g}'_o\|^3}}$$

La ***curvatura de torsión*** de C en $\bar{X}_o$ es:

$$\boxed{ct_o \doteq \left\|\frac{dB}{ds}(s_o)\right\| = -\frac{(\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o)\cdot \bar{g}'''_o}{\|\bar{g}'_o \wedge \bar{g}''_o\|^2}}$$

a) Halle la ecuación normal de la curva de ecuación $\bar{X} = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 4t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, definiendo como origen de abscisa curvilínea el punto $(0,2,2\pi)$.

b) Halle la ecuación cartesiana del plano osculador de la curva C intersección del cilindro parabólico de ecuación $z = x^2$ con el plano de ecuación $z + x = 2$ en el punto (1,1,1); y calcule las curvaturas de flexión y de torsión de C en dicho punto.

c) Demuestre que toda recta, tiene curvatura de flexión nula en todos sus puntos.

d) Demuestre que la circunferencia tiene igual curvatura de flexión en todos sus puntos.

e) Determine la posición del centro de curvatura de flexión correspondiente al punto (4,1,12) de la curva de ecuación $\overline{X} = (2t, t-1, t^3+4)$ con $t \geq 1$.

f) Sean $\overline{X} = \overline{g}(t)$, $\overline{v} = \overline{g}'$ y $\overline{a} = \overline{v}'$ la posición, velocidad y aceleración de un punto que se desplaza por el espacio, donde t es el tiempo. Demuestre que la velocidad es siempre tangencial; y la aceleración: es nula si el movimiento es rectilíneo uniforme ($\overline{v}$ constante), es tangencial si es rectilíneo no uniforme, y yace en el plano osculador si no es rectilíneo (es expresable como combinación lineal de T y N).

08) En $\Re^2$, si $\bar{f} = (P,Q)$, interprete la igualdad $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ e indique como se expresaría en $\Re^3$.

09) Sea $\overline{F}$ constante en todo punto del segmento $\overline{AB}$, verifique que $\int_{\overline{AB}} \overline{F} \cdot d\bar{s} = \overline{F} \cdot (\overline{B} - \overline{A})$. Relacione este resultado con la conocida expresión del trabajo de una fuerza contante a lo largo de un camino recto.

10) Sea C un arco de curva suave y simple, demuestre que si $\overline{H} = k\,T$ con k constante positiva $\int_C \overline{H} \cdot d\bar{s} = H \cdot \text{longitud}(C)$ donde $H = \|\,\overline{H}\,\|$. (*)

11) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (y, -x)$ a lo largo de la frontera de la región definida por $x^2 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq 1$, en sentido positivo. Observe que en este ejemplo la circulación no resulta nula, aún con camino cerrado.

12) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x - y,\, x,\, yz)$ a lo largo de la curva intersección de $z = x - y^2$ con $y = x^2$ desde $(1,1,0)$ hasta $(-1,1,-2)$.

13) Calcule el trabajo de $\bar{f}(x,y,z) = 3x\,\breve{\imath} - xz\,\breve{\jmath} + yz\,\breve{k}$ a lo largo de la curva de ecuación $\overline{X} = (t-1, t^2, 2t)$ con $t \in [1,3]$. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?, ¿puede asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?.

14) Verifique si los siguientes campos admiten función potencial; de existir, determínela.

a) $\bar{f}(x,y) = (y - 2xy + 1, x + 1 - x^2)$.

b) $\bar{f}(x,y) = (x - y^2, y - x^2)$.

c) $\bar{f}(x,y,z) = (z\cos(xz), z, y + x\cos(xz))$.

d) $\bar{f}(x,y,z) = (2x + y + 1, x + z, y + 2z)$.

15) Siendo $\bar{f} = \nabla\phi$ un campo de fuerzas y C un arco de curva recorrido desde $\overline{A}$ hasta $\overline{B}$ el trabajo realizado por el campo es $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = \phi(\overline{B}) - \phi(\overline{A})$. Para calcular $-\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ que es el trabajo en contra del campo, se acostumbra denominar función potencial a $U = -\phi$; demuestre que en este caso resultan: $\bar{f} = -\nabla U$ y $-\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = U(\overline{B}) - U(\overline{A})$.

(*) T versor tangente principal, $\overline{H}$ de módulo constante y orientado según T en cada punto.

16) Sea $\bar{f}:\Re^2-\{\bar{0}\}\to\Re^2\ /\ \bar{f}(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$, demuestre que $\bar{f}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en su dominio. Por otra parte, verifique que su circulación a lo largo de una circunferencia con centro en el origen no resulta nula.
En este caso, ¿puede asegurar que $\bar{f}$ admite función potencial en su dominio?.

17) Sean $\bar{f}$ un campo de gradientes con matriz jacobiana $D\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix}2y-6x & 2x\\ 2x & 0\end{pmatrix}$ y C una curva abierta cualquiera con puntos extremos $\bar{A}$ perteneciente al eje y y $\bar{B}$ perteneciente a la curva de ecuación $y=x-x^{-1}$. Demuestre que $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0$, sabiendo que la gráfica de su función potencial pasa por (1,1,3) con plano tangente de ecuación $z = y+2$.

18) Sea $\bar{f}\in C^1\ /\ \bar{f}(x,y)=(xy^2\ ,\ y\,g(x))$, determine g de manera que $\bar{f}$ admita función potencial; suponga que $\bar{f}(2,1) = (2,6)$.

19) Siendo $\bar{f}(x,y,z)=(2xy+z^2\ ,\ x^2,\ 2xz)$, **verifique** que admite función potencial en $\Re^3$ y **calcule** $\int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\bar{X}=(2t+e^{t^3-t}\ ,\ t^2-t\ ,\ 3t)$ con $0\le t\le 1$ orientada en el sentido que impone la parametrización que se indica.

20) Sea $\bar{X}=\bar{g}(t)$ la "posición" y $\bar{X}'=\bar{g}'(t)$ la "velocidad" (t es el tiempo). Demuestre que toda fuerza proporcional a la velocidad es disipativa (no conservativa).

21) Dada $\bar{f}(x,y)=(ax\ ,\ y-ax)$ y la curva C de ecuación $\bar{X}=(\cos(t)\ ,\ b\,\mathrm{sen}(t))\ \wedge\ t\in[0,2\pi]$, determine a y b de manera que $a+b=6$ y la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de C sea mínima.

Demuestre las siguientes propiedades; cuando corresponda suponga *C* suave.

a) C arco simple $\Rightarrow\ \int_C T\cdot d\bar{s}=\mathrm{longitud}(C)$.

b) $\bar{f}=\nabla\phi\in C^1\ \Rightarrow\ D\bar{f}$ simétrica.

c) $\bar{f}=\nabla\phi\in C^1\ \wedge\ \int_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0\ \Rightarrow$ puntos extremos de C con igual potencial.

d) $\oint_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0\ \forall C\Rightarrow \int_{C_1}\bar{f}\cdot d\bar{s}=\int_{C_2}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ donde C_1 y C_2 son curvas abiertas recorridas desde $\bar{A}$ hasta $\bar{B}$.

e) $f\in C^1\Rightarrow \int_{\overline{AB}} f'(\bar{X},\breve{r})\,ds=f(\bar{B})-f(\bar{A})$ con $\breve{r}$ orientado de $\bar{A}$ a $\bar{B}$.

9. Integrales múltiples

01) Calcule el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles; se recomienda no aplicar propiedades de simetría, plantee los límites para toda la región.

a) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \ / \ y \geq 2x^2 + 1 \ \wedge \ x + y \ \leq 4\}$.

b) D : definida por $x^2 \ \leq \ y \ < \ \sqrt{2 - x^2}$.

c) D : dominio del campo $\bar{f}(x, y) = (\ln(x + y - 2) \ , \sqrt{y - 2x + 2} \ , (2x + 2 - y - x^2)^{-1/4})$.

d) D : limitada por las curvas de ecuación $y \ = \ x^3$ e $y = x$.

e) D : conjunto de positividad de $f(x, y) \ = \ (y - 2|x|) \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

f) D : conjunto donde son positivas las componentes de $\bar{f}(x, y) \ = \ (4 - x^2 - y^2, 2 - x - y^2)$.

02) Calcule las siguientes integrales en ambos órdenes de integración y verifique que los resultados coinciden.

a) $\iint_D dx\,dy$, D definido por: $0 \ \leq \ y \ \leq \ \text{sen}(x)$, $0 \ \leq \ x \ \leq \pi$.

b) $\iint_D x \ dx\,dy$, $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

c) $\iint_D |\,x\,| \ dx\,dy$, $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

d) $\iint_D f(x, y) \ dx\,dy$, D definido por: $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$, $f(x, y) = \begin{cases} x\,y & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) $\int_0^1 dx \int_0^x (x + y)\,dy + \int_1^4 dx \int_0^1 (x + y)\,dy$.

f) $\iint_D e^{-x} \ dx\,dy$, D definido por: $e^x \leq y \leq e^{2x} \ \wedge \ 0 \leq x \leq \ln 2$.

03) Calcule la masa y el centro de masa de una placa circular con centro en el origen de coordenadas, si su densidad superficial (kg/m^2) en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje x.

04) Sea D una placa plana con densidad $\delta(x, y)$ y centro de masa $\overline{G}$. Demuestre que el momento de inercia de D respecto a una recta r paralela a los ejes coordenados es mínimo cuando r pasa por $\overline{G}$.(*)

05) Calcule las siguientes integrales, en algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx$.   b) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \ dx\,dy$.   c) $\int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_0^5 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$.

06) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado.

a) $\iint_D (6 - x - y)^{-1} \, dx\,dy$, D : $|\,x + y\,| \leq 2 \ \wedge \ y \leq x + 2 \leq 4$, usando $(x, y) = (v, u - v)$.

b) Calcule el área de la región plana definida por $1 \leq \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 4$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ aplicando la transformación $(x, y) \ = \ (a\rho\cos(\varphi), b\rho\,\text{sen}(\varphi))$.

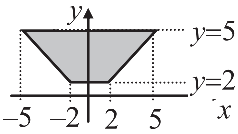
c) $\iint_D (x - y)^4 \, dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |\,x\,| + |\,y\,| \leq 4\}$, aplicando una transformación lineal apropiada.

(*) En general, el momento de inercia respecto de una recta es mínimo cuando la recta pasa por $\overline{G}$.

d) $\iint_D (x+y-2)^2\, dxdy$ aplicando el cambio de variables definido por :

$$(x,y) = (u+v, u-v)\,,\ \text{con}\ \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ y \geq |x|\,,\ x+2y \leq 3\}.$$

e) Siendo D la región sombreada del dibujo, **calcule** $\iint_D y\,(x^2+y^2)^{-1} dxdy$ usando coordenadas polares.



07) a) Dada $f(x,y) = e^{x^2+2y^2}$, calcule el área de la región plana limitada por las curvas de nivel e^4 y e^8 de la función.

b) Calcule $\iint_D e^{x^2+2y^2} dx\,dy$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2+2y^2 \leq 4\ \wedge\ x \geq \sqrt{2}\,|\,y\,|\}$.

08) Dada la $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx\,dy$ con $D = \mathbb{R}^2$.

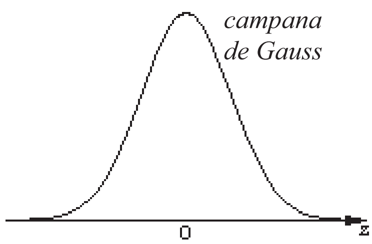
a) Calcúlela usando coordenadas polares.

b) Trabajando en cartesianas, demuestre que su resultado es del tipo $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^2$.

c) Dada $f(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$, demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 1\,.$$

Definida en $\mathbb{R}$, f es la función de densidad de probabilidad normal estandarizada que se utiliza en múltiples aplicaciones, incluso en teoría de errores. La gráfica de f se denomina “campana de Gauss”.



09) Calcule $\iint_D \dfrac{x+4y}{x^2} dxdy$ con $D:\ x \geq y\,,\ x+4y \leq 4\,,\ y \geq 0$ usando coordenadas polares.

10) En los siguientes casos se indica una integral planteada en coordenadas polares, grafique la región correspondiente en el plano xy, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

a) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos(\varphi)} \rho^3\, d\rho$.

b) $\int_{-\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}/\cos(\varphi)} \rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho$.

11) Dada $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{4-\rho^2} \rho^2\, dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, represente la región de integración en el espacio xyz , plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

12) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

a) H definido por $2y \geq x^2 + z$, $x + y \leq 4$, 1° octante.

b) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x+y+z \leq 6\ \wedge\ z \geq x+y\ \wedge\ x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$.

c) H definido por $x^2 + z^2 \leq 2ax$, interior a la esfera de radio $2a$ con centro en el origen de coordenadas.

d) H definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2$ con $a>0$.

e) $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; z\geq x^2 \;\wedge\; x\geq z^2 \;\wedge\; x\geq|\,y\,|\,\}$.

f) H definido por $x^2+z^2 \leq 9$, $y\geq 2x$, $y\leq 2x+4$.

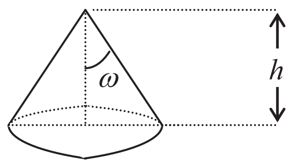
g) H definido por $y\geq x^2$, $x^2+y^2\leq 2$, $z\geq 0$, $z\leq x$.

h) H definido por $x^2+2y^2+z\leq 32$, $z\geq x^2$.

13) Determine el centro de masa del cuerpo limitado por $y=x$, $y=2x$, $x+y+z=6$, $z=0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano *yz*.

14) Dado el cuerpo definido por $\sqrt{y^2+z^2}\leq x\leq 4$, calcule su momento de inercia respecto del eje x sabiendo que su densidad es $\delta(x,y,z)=k|\,y\,|$ con k constante.

15) Determine el volumen de un cuerpo cónico (cono circular recto) de altura h y ángulo de apertura ω; ubíquelo en la posición más conveniente para facilitar los cálculos.



16) Sea el cuerpo H convexo y simétrico respecto del plano *xz*, calcule $\iiint_H y^n\,dx\,dy\,dz$ cuando n es un número natural impar.

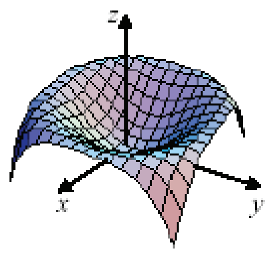
17) Calcule la masa de los siguiente cuerpos:

a) Cuerpo limitado por $z=4-x^2-y^2$, $z=8-2x^2-2y^2$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

b) Cuerpo definido por $z\geq|\,y\,|$, $x^2+y^2+z^2\leq 1$ si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano *xy*.

c) Cuerpo definido por $x^2+y^2\leq 9$, $0\leq z\leq 2$ con densidad en cada punto proporcional a la distancia desde el punto al plano *xz*.

18) En la figura se representa la forma de un recipiente cuya ecuación es $z=8x^2+8y^2-(x^2+y^2)^2$ con $(x,y)\in[-2,2]\times[-2,2]$; el recipiente se apoya en el plano *xy* en las puntas y en el origen.
Calcule el volumen de líquido que contiene el recipiente cuando se lo llena exactamente hasta el borde superior; considere que la expresión dada permite calcular z en centímetros cuando x e y están expresados en cm.



Cuestionario

a) ¿Pueden usarse coordenadas polares en regiones que contengan al origen? (recuerde que el jacobiano se anula en el origen).

b) ¿Por qué el área de un círculo no cambia si se incluye o no la circunferencia frontera?.

c) Realice una interpretación geométrica de la fórmula de cambio de variables en integrales dobles.

d) Describa las superficies coordenadas de cilíndricas y esféricas en el espacio *xyz*.

Integrando con el Mathematica

Se dispone de dos funciones básicas, **Integrate** y **NIntegrate**.

Integrate[f, x] devuelve una primitiva de **f** integrada respecto de **x**.
Integrate[f, {x,a,b}] calcula la integral definida de **f** respecto de **x** entre **a** y **b**.
Integrate[f, {x,a,b}, {y,y$_1$(x),y$_2$(x)}] }] calcula la integral doble, integrando primero respecto de **y** entre **y$_1$(x)** e **y$_2$(x)** y luego respecto de **x** entre **a** y **b**.
NIntegrate[f, {x,a,b}] calcula una aproximación numérica de la integral definida de **f** respecto de **x** entre **a** y **b**. Nota: **f**, **a** y **b** deben estar completamente definidos.

El Mathematica admite límites infinitos, **Infinity** lo interpreta como ∞.

Ejemplos

Integrate[x Cos[x], x] $\to$ Cos[x] + x Sin[x]

Integrate[x Cos[x], {x,0,Pi/2}] $\to -1+\frac{\text{Pi}}{2}$

NIntegrate[x Cos[x], {x,0,Pi/2}] $\to$ 0.570796

Integrate[x Cos[a x], {x,0,Pi/2}] $\to -\frac{1}{a^2}+\frac{\text{Cos}[\frac{a\,\text{Pi}}{2}]}{a^2}+\frac{\text{Pi Sin}[\frac{a\,\text{Pi}}{2}]}{2a}$

NIntegrate[x Cos[a x], {x,0,Pi/2}] $\to$ no resuelve (“a” no está previamente definida).

Integrate[Exp[– x^2], {x, –Infinity, Infinity}] $\to$ Sqrt[Pi] (se puede concluir del ítem 08 a y b).
NIntegrate[Exp[– x^2], {x, –Infinity, Infinity}] $\to$ 1.77245

Para resolver $\int_1^2 dx \int_x^{2x} (x^2 - y)\, dy$ ordenamos: **Integrate[x^2–y, {x,1,2}, {y, x, 2 x}]** $\to \frac{1}{4}$

o bien, **Integrate[Integrate[x^2–y, {y, x, 2 x}],{x,1,2}]** $\to \frac{1}{4}$.

Resolviendo $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_{x+y}^2 x\,y\,dz$: **Integrate[x y, {x, 0, 1}, {y, 0, x}, {z, x+y, 2}]** $\to \frac{1}{12}$

Resolviendo $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y^2} dx$ correspondiente al ítem “01f ”:

Integrate[1, {y, –Sqrt[3], Sqrt[3]}, {x, –Sqrt[4–y^2], 2–y^2}] $\to \frac{1}{3}(9\,\text{Sqrt}[3]+4\,\text{Pi})$

10. Integrales de superficie, flujo

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- Una superficie S de ecuación $\overline{X} = \overline{F}(u,v)$ con $(u,v) \in D$ es ***suave*** según esta representación, si $\overline{F} \in C^1(D)$ y el producto vectorial $\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \neq \overline{0}\ \forall (u,v) \in D$.

  En este caso queda definido el versor normal $\breve{n} \doteq \dfrac{\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v}{\| \overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \|}$ que varía con continuidad sobre *S*; a su vez, si la superficie es orientable queda orientada mediante este versor.

  La superficie es ***suave a trozos*** cuando D puede ser dividido en cantidad finita de partes en cada una de las cuales (o en abierto que las contenga) $\overline{F} \in C^1$ y $\overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \neq \overline{0}$.

- $\iint_S f\, d\sigma$ simboliza la integral de superficie del campo escalar f sobre S, donde $d\sigma = \| \overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \|\, du dv$ es el ***diferencial de área de superficie***.

- $\iint_S \bar{f} \cdot d\bar{\sigma} \equiv \iint_S \bar{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma$ simboliza el ***flujo*** o integral de superficie del campo vectorial $\bar{f}$ a través de S, donde $d\bar{\sigma} \doteq \breve{n}\, d\sigma$.

Observación: Si *S* es suave y <u>simple</u> según dos representaciones $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$, la $\iint_S f\, d\sigma$ tiene el mismo resultado usando cualquiera de ellas; mientras que se observará un cambio de signo en el resultado de $\iint_S \bar{f} \cdot \breve{n}\, d\sigma$ cuando $\overline{F}_1$ y $\overline{F}_2$ orienten a S en sentidos opuestos.

01) Una ***superficie cilíndrica*** es aquella generada por rectas paralelas que pasan por puntos de una curva $C \subset \Re^3$, la curva es la ***directriz*** y la rectas las ***generatrices*** de la superficie. Determine ecuaciones paramétricas y cartesianas para las siguientes superficies cilíndricas:

a) directriz $y = x^2$ con $z = 0$, generatrices paralelas al eje *z*.

b) directriz $y = x^2$ con $z = 0$, generatrices dirigidas por el vector (1,1,1).

c) directriz $x^2 + y^2 = 4$ con $z = 0$, generatrices paralelas al eje *z*.

d) directriz $\overline{X} = (u, 2u, u^2)$ con $u \in \Re$, generatrices dirigidas por (2,1,0).

02) Una ***superficie cónica*** es aquella generada por rectas determinadas por los puntos de una curva $C \subset \Re^3$ y un punto fijo $\overline{V} \notin C$, la curva es la ***directriz*** y el punto $\overline{V}$ el ***vértice*** de la superficie. Determine ecuaciones paramétricas y cartesianas para las siguientes superficies cónicas:

	a)	b)	c)	d)
directriz:	$y = x^2,\ z = 0$	$y = x^2,\ z = 0$	$x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$	$\overline{X} = (u, 2u, u^2) \wedge u \in \Re$
vértice:	(0,0,1)	(1,4,0)	(0,0,2)	(0,0,1)

03) Parametrice las siguientes superficies:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

b) $x^2 + 4y^2 = 4$.

c) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

d) $z = x^2 + y^2$.

04) Sea S una superficie uniforme respecto del plano *xy*, definida implícitamente mediante la ecuación $G(x,y,z)=0$. Imponga hipótesis para G de manera que S sea suave; en ese caso, si la ecuación en forma explícita fuera $z=g(x,y)$ con $(x,y)\in D_{xy}$ (x,y), demuestre que:

Para campo escalar: $\iint_S f\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[f\,\dfrac{\|\nabla G\|}{|G'_z|} \right]_{z=g(x,y)} dxdy$.

Para campo vectorial: $\iint_S \bar{f}\cdot d\bar{\sigma} = \iint_{D_{xy}} \left[\dfrac{\bar{f}\cdot\nabla G}{|G'_z|} \right]_{z=g(x,y)} dxdy$.

Donde, en ambos casos, D_{xy} se obtiene proyectando S sobre el plano *xy*.

05) Calcule el área de las siguientes superficies:

a) Trozo de superficie cilíndrica $z=2x^2$ con $y\le x$, $z\le 6$, 1° octante.

b) Trozo de superficie cónica $z=\sqrt{2x^2+2y^2}$ interior a la esfera de radio 12 con centro en el origen de coordenadas.

c) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+z^2=4$ con $-x\le y\le x$, $z\ge 0$.

d) Superficie esférica de radio R.

e) Trozo de superficie cilíndrica $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2\le 4$ en el 1° octante.

f) Superficie frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$.

g) Superficie de ecuación $z=x^2-y$ con $|y|<x$, $x<1$.

h) Trozo de plano tangente a $z=x+\ln(xy)$ en $(1,1,z_0)$ con $x^2+y^2\le 9$.

06) Calcule el momento de inercia respecto del eje z de una chapa con forma de paraboloide $z=x^2+y^2$, con $x\ge 0 \wedge 1\le z\le 4$, si la densidad superficial en cada punto de la chapa es $\delta(x,y,z)=\dfrac{k}{x^2+y^2}$ con k constante.

07) Sea $\bar{F}=k\,\breve{n}$ con $k>0$ constante, demuestre que $\iint_S \bar{F}\cdot\breve{n}\,d\sigma = F$ área(S) con $F=\|\bar{F}\|$.(*)

08) Demuestre que el flujo de $\bar{F}$ <u>constante</u> a través de S <u>plana</u> con normal $\breve{n}$ es $\bar{F}\cdot\breve{n}$ área(*S*).

09) Sea $\bar{f}\in C^1$ un campo de gradientes y S un trozo de una de sus superficies equipotenciales (que se supone suave). Demuestre que cuando S está orientada en el sentido de los potenciales crecientes, el flujo de $\bar{f}$ a través de S es positivo.

10) Calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de *S*, indicando gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido, o bien que se le solicite en cada caso.(&)

a) $\bar{f}(x,y,z)=(x^2+yz\,,xz\,,2z^2-2xz)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1\le z\le 5-x^2-y^2$.

b) $\bar{f}(x,y,z)=(x,\,y,\,z)$ a través de la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=4$.

(*) Flujo de campo con módulo constante, con igual orientación que la superficie en cada punto.

(&) Cuando la superficie es cerrada (frontera de un cuerpo *H*), se la orienta (por convención) con versor normal saliente de *H*. Entonces, el flujo positivo es "saliente" de *H* y el negativo es "entrante" a *H*.

c) $\bar{f}(x,y,z)=(x\,y,\,z\,x,\,y-x\,z^2)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y=x^3$ con $0\le z\le x+y,\; x+y\le 10$.

d) $\bar{f}(x,y,z)=(y\,,\,x,\,y)\wedge(x\,,\,z\,,\,y)$ a través del trozo de plano tangente a la superficie de ecuación $z=x^2-y\,x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ con $(x,y)\in[0,2]\times[1,3]$.

e) $\bar{f}(x,y,z)=(x\,y,\,z,\,y)$ a través de la superficie frontera del cuerpo limitado por $x^2+y^2\le 4$, $x+y+z\le 18$, en el 1° octante. Nota: en este caso, como en muchos otros, el cálculo de flujo puede realizarse en forma más sencilla aplicando el teorema de la divergencia (ver T.P. siguiente).

11) Sea $\bar{f}$ continuo tal que $\bar{f}(x,y,z)=(x-y\,,\,x-z\,,\,g(x,y,z))$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie de ecuación $x=y^2$ con $0\le z\le 4$, $0\le y\le 2-x^2$.

12) Calcule el flujo del gradiente de $f(x,y,z)=x+y+z\;g(x-y)$ a través de $x+y=4$ en el 1° octante, con $0\le z\le 8$. Suponga $g\in C^1$.

13) Sea S un trozo de superficie de ecuación $z=y^2-x^2$ cuya proyección sobre el plano xy es la región D. Sea $g(x,y,z)=z+h(xy)$ con $h\in C^1$, demuestre que el flujo de ∇g a través de S es proporcional al área de D.

14) Calcule el flujo de $\overline{X}=(x,y,z)$ a través de la frontera del cubo $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ orientada con normal saliente del cubo.

15) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(x,2y,z)$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del triángulo con vértices en los puntos $(2,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,1)$. Indique en un gráfico cómo ha decidido orientar la superficie.

16) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(x^2z,\,z^3,\,x^2\,z)$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del trozo de plano Σ de ecuación $z=2$ con $x^2+y^2+z^2\le 5$. Indique gráficamente cómo decidió orientar a Σ.

17) Sea ∂D la superficie frontera del cuerpo D definido por: $1\le z\le 5-x^2-y^2$. Sabiendo que $\oiint_{\partial D}\bar{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma=0$ y que $\bar{f}(x,y,z)=(\mathrm{sen}(y\cos(z))-2x,\,\mathrm{sen}(x\cos(z))-y,\,3z\,)$, calcule el flujo de $\bar{f}$ a través del trozo de frontera de ecuación $z=5-x^2-y^2$ orientado hacia z^+.

11. Teoremas integrales (Green, Gauss, Stokes)

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- $\nabla f \equiv \text{grad}(f)$ simboliza al ***gradiente*** del campo escalar f.
- Dado el campo vectorial $\bar{f} : D \subset \Re^3 \to \Re^3 / \bar{f}(x,y,z) = (P(x,y,z)\ ,\ Q(x,y,z)\ ,\ R(x,y,z))$

  $\nabla \cdot \bar{f} \equiv \text{div}(\bar{f})$ simboliza a la ***divergencia*** de $\bar{f}$, $\text{div}(\bar{f}) \doteq P'_x + Q'_y + R'_z$.

  $$\nabla \wedge \bar{f} \equiv \text{rot}(\bar{f}) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \doteq (R'_y - Q'_z\ ,\ P'_z - R'_x\ ,\ Q'_x - P'_y)$$ es el ***rotor*** de $\bar{f}$.

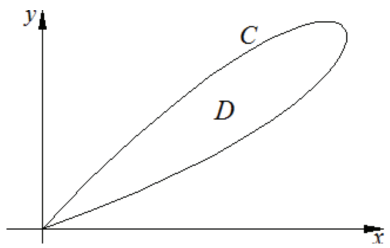
- Un campo es: $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{\textit{solenoidal,}} \text{ si su divergencia es nula en todo punto.} \\ \textbf{\textit{irrotacional,}} \text{ si su rotor es nulo en todo punto.} \\ \textbf{\textit{armónico,}} \text{ si su } \textit{laplaciano } \nabla^2 f \doteq \text{div}(\text{grad}(f)) \text{ es nulo en todo punto.} \end{array} \right.$

Nota: sea $f : D \subset \Re^n \to \Re^m$, $f \equiv a$ (constante) indica que $f(X) = a \ \forall X \in D$.

01) Sea $\bar{f} \in C^1 / \bar{f}(x,y) = (P(x,y)\ ,\ Q(x,y))$ con $Q'_x - P'_y \equiv k \neq 0$ (k constante). Aplicando el teorema de Green demuestre que $\text{Área}(D) = \frac{1}{k} \oint_{\partial D^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ con ∂D frontera de $D \subset \Re^2$.
Proponga alguna fórmula para el cálculo del área de regiones planas mediante integrales de línea y aplíquela para calcular el área de las regiones definidas por:
a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \ a,b \in \Re^+$. b) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. c) $x^2 + y^2 \le 4,\ x^2 + y^2 \ge 2x,\ x \ge 0$.

02) Calcule el área de la región plana D de la figura, sabiendo que su curva frontera C admite la ecuación vectorial:

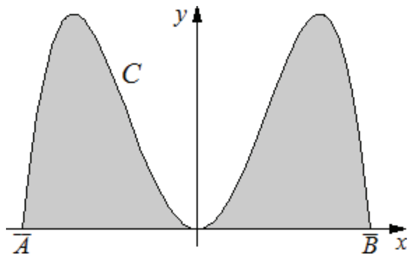
$$\bar{X} = (u - u^2\ ,\ u - u^4) \text{ con } 0 \le u \le 1$$



03) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (x^2 + y^2, 3xy + \ln(y^2 + 1))$ a lo largo de la frontera de la región definida por $4x^2 + (y-1)^2 \le 1$ recorrida en sentido positivo.

04) Verifique el teorema de Green con $\bar{f}(x,y) = (x^2\, y\ ,\ y^2)$, en la región plana $D = D_1 - D_2$ donde $D_1 = [-2,2] \times [-2,2]$ y $D_2 = [-1,1] \times [-1,1]$.

05) La región plana D sombreada en la figura tiene como frontera el segmento $\overline{AB}$ y el arco de curva C de ecuación $y = x^2 - x^4$. Dado $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ con matriz jacobiana $D\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} P'_x(x,y) & 3x-1 \\ 3x+2 & Q'_y(x,y) \end{pmatrix}$, calcule la circulación de $\bar{f}$ desde $\bar{A}$ hasta $\bar{B}$ a lo largo de C sabiendo que a lo largo del segmento resulta $\int_{\overline{AB}} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 17$.



06) Calcule la circulación en sentido positivo de $\bar{f} \in C^1$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $x+y \le 2$, $2x+y \ge 2$, 1° cuadrante, siendo:

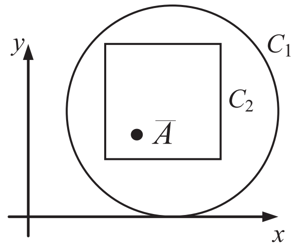
a) $\bar{f}(x,y) = (2y - g(x)\ ,\ 5x - h(y))$.   b) $\bar{f}(x,y) = (2y + g(x-y)\ ,\ 2x - g(x-y))$.

07) Calcule $\oint_{\partial D^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$, con: $D = [-2,2]\times[-3,3]$, $\bar{f}(x,y) = (1-y\ ,h(x))$, h par, h' continua.

08) Sea $\bar{f} = (P,Q) \in C^1$ en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$ tal que $Q'_x - P'_y \equiv 5$, dadas las curvas C_1: $x^2 + 9y^2 = 36$ y C_2: $x^2 + y^2 = 4$, calcule $\oint_{C_2^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\oint_{C_1^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 7\pi$.

09) Dado $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{A}\} \to \Re^2 /\ \bar{f} = (P,Q)$; suponga matriz jacobiana continua con $Q'_x - P'_y \equiv 6$.

Calcule $\oint_{C_1^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\oint_{C_2^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 12$, C_1 es una circunferencia de radio 8, C_2 es un cuadrado de lado 5.



10) Sea $\bar{f} : \Re^2 \to \Re^2$ con matriz jacobiana continua y simétrica, demuestre que para toda C en $\Re^2$ resulta $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0$; indique hipótesis para C.

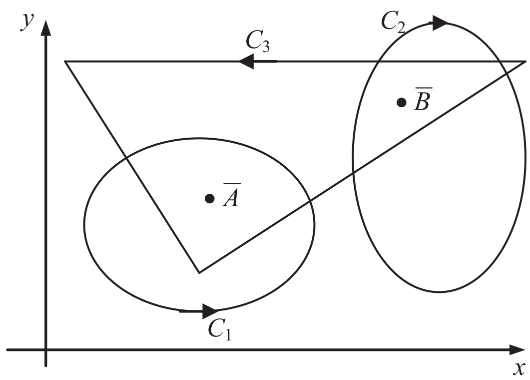
11) Dado $\bar{f}(x,y) = (9x^2 + 2y + y^2, 2x + 2xy)$, demuestre que $\bar{f}$ admite función potencial ϕ en $\Re^2$. Suponiendo $\phi(0,0) = 2$, analice la existencia de extremos locales de $\phi(x,y)$ clasificándolos y calculándolos.

12) Sea $\bar{f}$ con $D\bar{f}$ continua y simétrica en todo el plano salvo en los puntos $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Calcule $\oint_{C_3} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 12\pi \quad \text{y} \quad \oint_{C_2} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 16\pi .$$

Se entiende que cada circulación se realiza con la orientación indicada en la figura, C_3 es la frontera del triángulo.



13) Sea $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{A}\} \to \Re^2$ con $D\bar{f}$ continua y simétrica en D. Demuestre que $\bar{f}$ es campo de gradientes en D si, y sólo si, $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0$ con C cualquier curva simple y suave a trozos que rodea al punto $\bar{A}$.

14) Analice si $\bar{f} : \Re^2 - \{\bar{0}\} \to \Re^2 /\ \bar{f}(x,y) = (x,y) + (y,-x)/(4x^2 + y^2)$ admite función potencial en su dominio.

15) Sea $\bar{f} : \Re^3 - \{\bar{A}\} \to \Re^3$ con $D\bar{f}$ continua y rotor nulo en su dominio, aplique el teorema del rotor para demostrar que $\bar{f}$ admite función potencial en dicha región del espacio.[(&)]

[(&)] Observe que $\Re^3 - \{\bar{A}\}$ es un conjunto simplemente conexo de $\Re^3$, pero $\Re^2 - \{\bar{A}\}$ no lo es en $\Re^2$.

16) Demuestre que $\bar{E}(\bar{r}) = kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r} = (x,y)$, $r = \|\bar{r}\|$, k,q constantes(*) admite función potencial en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$. Halle $U(x,y)$ tal que $\bar{E} = -\nabla U$ con $U(\infty,\infty) = 0$.

Nota: Se utiliza $U(\infty,\infty)$ para simbolizar el $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} U(x,y)$.

Esta es una nomenclatura que suele figurar en algunos libros de física y de electromagnetismo. Es más, es común hablar del "potencial en el infinito" sin dejar de entender que se trata de un límite.

17) Resuelva el ítem anterior en $\Re^3 - \{\bar{0}\}$: dado $\bar{E}(\bar{r}) = kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\|$ analice la existencia de función potencial; halle $U(x,y,z)$ tal que $\bar{E} = -\nabla U$ con $U(\infty,\infty,\infty) = 0$.

18) Analice si $\bar{f}$ admite función potencial en su dominio natural; en "c" y "d" suponga $\varphi \in C^1$:

a) $\bar{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}, \dfrac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$

b) $\bar{f}(x,y) = \left(\dfrac{-6y}{4x^2+9y^2}, \dfrac{6x}{4x^2+9y^2}\right)$

c) $\bar{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}, \varphi(z)\right)$

d) $\bar{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}, \varphi(z)\right)$

19) En $\Re^3$, demuestre que:

a) $rot(\bar{f}) \equiv \bar{0} \Leftrightarrow D(\bar{f})$ simétrica.

b) $\bar{f} \in C^2 \Rightarrow div(rot(\bar{f})) \equiv 0$.

c) $\bar{f} = \nabla\phi \in C^1 \Rightarrow rot(\bar{f}) \equiv \bar{0}$.

d) Con a,b constantes: $div(a\bar{f} + b\bar{g}) = a\,div(\bar{f}) + b\,div(\bar{g})$,
$rot(a\bar{f} + b\bar{g}) = a\,rot(\bar{f}) + b\,rot(\bar{g})$.

e) Con f escalar: $div(f\,\bar{g}) = f\,div(\bar{g}) + \nabla f \cdot \bar{g}$, $rot(f\bar{g}) = f\,rot(\bar{g}) + \nabla f \wedge \bar{g}$.

f) $div(\bar{f} \wedge \bar{g}) = rot(\bar{f}) \cdot \bar{g} - \bar{f} \cdot rot(\bar{g})$.

20) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x-y\,,\,x+y\,,\,z-x-y)$ a lo largo de la curva intersección del plano $x+2y+3z=6$ con los planos coordenados aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

21) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (xy\,,\,y-x\,,\,yz^2)$ a lo largo de la curva intersección de $x^2+y^2+z^2=8$ con $x = \sqrt{y^2+z^2}$ aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

22) Siendo $\bar{f} \in C^1$, $\text{rot}(\bar{f}(x,y,z)) = (3,1,2y)$, calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo del arco de curva de ecuación $\bar{X} = (0, 2\cos(u), 2\,\text{sen}(u))$ con $u \in [0,\pi]$, sabiendo que la circulación de $\bar{f}$ por el segmento desde $(0,-2,0)$ hasta $(0,2,0)$ es igual a 16/3.

23) Verifique el teorema de la divergencia con el campo $\bar{f}(x,y,z) = (xy\,,\,yz\,,\,xz)$ y la superficie frontera del paralepípedo $[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

(*) Distribución plana de campo electrostático creado por una carga eléctrica q puntual ubicada en (0,0).

24) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z)=(x-y-z\,,\,y-x-z,\,g(x,y))$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $2x+3y+4z\le 12$ en el 1° octante. Indique la orientación del versor normal que considera y las hipótesis que supone para el campo escalar *g*.

25) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z)=(x^2z^2,1+xyz^2,1-xz^3)$ a través del trozo *S* de paraboloide de ecuación $y=x^2+z^2$ con $y<4$ aplicando convenientemente el teorema de la divergencia. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a *S*.

26) Suponga $\varphi:\Re\to\Re$, $\varphi\in C^1$, $\bar{f}(x,y,z)=(x\,\varphi(xz)\,,\,y^2+x\,\varphi(xz)\,,\,y-z\,\varphi(xz))$; **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de una superficie esférica *S* de radio *R* con centro en el origen aplicando el teorema de la divergencia, indique gráficamente la orientación del versor normal a *S*.

27) Calcule el flujo de $\bar{f}\in C^1$ a través de la superficie de ecuación $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ sabiendo que $\bar{f}(x,y,0)=(x\,,\,y\,,\,x^2)$, siendo $\operatorname{div}(\bar{f}(x,y,z))=2\,(1+z)$.

28) Sea $\bar{f}:\Re^3-\{\bar{A}\}\to\Re^3$ con derivadas continuas y divergencia nula en su dominio. Aplique el teorema de la divergencia para demostrar que el flujo de $\bar{f}$ a través de una superficie *S* cerrada sólo depende de si S encierra o no al punto $\bar{A}$. Se supone $\bar{A}\notin S$, $\breve{n}$ saliente.

29) Sea $\bar{E}(x,y,z)=kq\,\bar{r}/r^3$ con $\bar{r}=(x,y,z)$, $r=\|\bar{r}\|$. Calcule el flujo de $\bar{E}$ a través de una superficie esférica de radio *R* con centro en el origen. Aplique lo indicado en el ítem 28 y concluya sobre el valor de dicho flujo a través de otras superficies que encierren al origen.

30) Si $\bar{f}=\operatorname{rot}(\bar{g})$, se dice que $\bar{g}$ es el ***potencial vectorial*** de $\bar{f}$. Demuestre que es nulo el flujo a través de cualquier superficie cerrada S de todo campo C^1 que admita potencial vectorial (se supone *S* suave a trozos).

31) Sean $\varphi\in C^2$ armónico, ∂H suave a trozos la superficie frontera del cuerpo *H* y el campo vectorial $\bar{f}=\varphi\nabla\varphi$. Demuestre que $\oiint_{\partial H}\bar{f}\cdot\breve{n}\,d\sigma\ge 0$, siendo $\breve{n}$ saliente de *H*.

32) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z)=(g(y,z),\,h(x,z),\,3x^2)$ a través de la superficie Σ abierta de ecuación $z=5-x^2-y^2$ con $z\ge 1$; suponga $\bar{f}\in C^1$, indique la orientación que eligió para el $\breve{n}$ de Σ.

33) Sea $\bar{f}(x,y,z)=(x+g(x,y),\,y+g(x,y),\,g(x,y)-2z)$ calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la frontera del cuerpo definido por $x^2+y^2\le 4$ con $-1\le z\le 1$, si $\nabla g(x,y)=(x+y\,,x-y)$.

34) Sea $\bar{f}\in C^1\,/\,\bar{f}(x,y,z)=(z+x\,g(2xy)\,,\,y\,g(2xy)\,,\,zxy-2z\,g(2xy))$, halle la expresión de $\bar{f}$ sabiendo que el campo es solenoidal y que $\bar{f}(1,1,1)=(3,2,-3)$.

35) Calcule el flujo de $\bar{f}=\nabla(g+h)$ a través de $x^2+y^2+z^2=9$, siendo *g* armónico y *h* una solución de la ecuación diferencial $\nabla^2 h=x^2+y-z$. Suponga $\bar{f}\in C^1$.

36) Dados $\bar{f}(x,y,z)=(6a^3x,\,6aby,\,b^2z)$ con *a*, *b* constantes y la superficie Σ frontera del cuerpo D definido por $x^2+y^2\le 4$ con $1\le z\le 4$. Halle a y b tales que el flujo de $\bar{f}$ a través de Σ sea un extremo local; clasifique dicho extremo suponiendo Σ orientada hacia el exterior de D.

12. Ecuaciones diferenciales – 2° parte

Nomenclatura y consideraciones básicas:

- S.G. simboliza ***solución general***, S.P. ***solución particular***, S.S. ***solución singular***.
- Dada la ecuación diferencial ordinaria $F(y^{(n)},\cdots,y',y,x)=0$ de orden n, sus soluciones, de existir, no siempre admiten que se las exprese en forma explícita. Las soluciones son relaciones entre las variables que satisfacen a la ecuación diferencial; en especial, la S.G. debe contener n constantes arbitrarias esenciales.

01) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales homogéneas de 1° orden.

a) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$ con $y(1)=1$.

b) $(x^2+y^2)\,dx - 2\,xy\,dy = 0$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x\cos^2(y/x)}{x}$ con $y(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

d) $y' = y/(x-y)$.

02) Halle la familia de curvas ortogonales a $x^2+y^2=2\,a\,x$.

03) Resuelva $y' = (x-y-1)/(x+y+3)$ aplicando la transformación $(x,y)=(u-1,v-2)$.

04) Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo.

a) $2\,xy\,dx + (x^2+\cos y)\,dy = 0$.

b) $y' = \dfrac{x\,y^2-1}{1-x^2y}$ con $y(-1)=1$.

c) $(6\,xy - y^3)\,dx + (4y + 3\,x^2 - 3\,xy^2)\,dy = 0$.

d) $(y^2-y)\,dx + x\,dy = 0$. (*)

e) $(x+y^2)\,dx - 2\,y\,x\,dy = 0$.

f) $y^2\cos x\,dx + (4+5y\,\mathrm{sen}\,x)\,dy = 0$.

05) Resuelva la ecuación $x^2y' = y + x\,e^{-1/x}$ mediante el reemplazo $y = x^2 q(x)$.

06) Halle la S.G. de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 2$.

c) $y'' - 3y' + 2y = x\,e^x + 2x$.

d) $y'' + y = \sec(x)$.

e) $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x$.

f) $y'' + y' = 2\,\mathrm{sen}(x)$.

07) Halle g de manera que $\bar{f}(x,y) = (y\,g'(x),\ x^2 - g'(x))$ admita función potencial.

08) Halle la solución particular (S.P.).

a) S.P. de $y'' - y' - 2y = 4x^2$ tal que $y(0)=1,\ y'(0)=4$.

b) S.P. de $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ con recta tangente de ecuación $y = 2x+1$ en $(0,y_0)$.

c) S.P. de $y'' + 2y' + 2y = \mathrm{sen}(2x) + \cos(2x)$ tal que $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

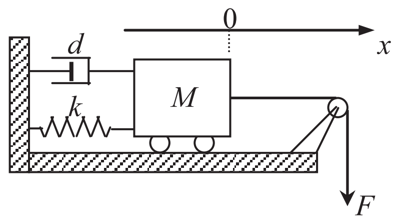
d) S.P. de $y''' - 3y'' + 2y' = x^2 - x$ tal que $y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=2$.

e) S.P. de $y'' - y = 2x - 1$ con recta normal de ecuación $x + 3y = 6$ en $(0,y_0)$.

09) Dada $y'' + y = f(x)$, halle su S.G. sabiendo que $y = 2\,x^2$ es una S.P.

(*) También es de variables separables, verifique que el método de resolución no cambia el tipo de solución obtenida.

10) El cuerpo de masa M puede desplazarse horizontalmente con rozamiento despreciable y está acoplado a la pared vertical mediante un resorte de constante k y un amortiguador de constante d. En tiempo $t=0$ está en reposo en la posición $x=0$ y se le aplica una fuerza F constante que lo lleva hacia x^+ partiendo con velocidad $x'(0)=0$.



Siendo: $\overbrace{F - \underbrace{k\,x}_{resorte} - \underbrace{d\,x'}_{amortig.}}^{fuerza\ total} = \overbrace{M}^{masa} \cdot \overbrace{x''}^{aceleración}$ resulta $\boxed{Mx''+dx'+k\,x=F}$

a) Con $F=4.35$, $M=3$, $k=87$ halle y grafique $x(t)$ para: a[1]) $d=12$, a[2]) $d=38$.

b) Indique las unidades de medida de x', x'', M, k, d cuando el tiempo se mide en segundos ($[t]=\text{s}$), $[F]=\text{Newton (N)}=\text{kgm/s}^2$ y $[x]=\text{m}$.

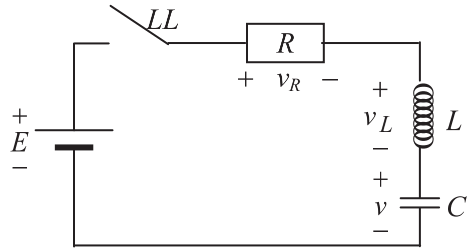
11) En el circuito se observa una llave *LL*, una fuente de tensión *E* constante, un resistor de resistencia *R*, un inductor con inductancia *L* y un capacitor con capacitancia *C* ; se suponen componentes ideales. Se denotan v_R, v_L y v las tensiones entre terminales del resistor, inductor y capacitor respectivamente.

Con LL cerrada se cumple que: $E = v_R + v_L + v$ (1)

Siendo(#) $i = C\,v'$, resultan: $\begin{cases} v_R = R\,i = RC\,v' \\ v_L = L\,i' = LCv'' \end{cases}$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$\boxed{LC\,v''+RC\,v'+v=E}$$



En tiempo $t=0$, con capacitor descargado ($v(0)=0$) se cierra LL y comienza a circular corriente ($i(0)=0 \Rightarrow v'(0)=0$). Halle y grafique $v(t)$ e $i(t)$ cuando el tiempo se mide en segundos (s), $E=0.05$ Volt, $R/L=4\text{ s}^{-1}$, $(LC)^{-1}=29\text{ s}^{-2}$.

<u>Nota</u>: Observe que $v(t)$ permite simular $x(t)$ del ítem anterior para el caso caso "a[1])" (equivalente eléctrico del sistema mecánico).

12) Sea $v''+k\,v'+9\,v=0$ con $v(0)=0$, $v'(0)=1$; ¿para qué valores de k la solución $v(t)$ presenta oscilaciones amortiguadas?.

13) Halle y grafique la familia de líneas de campo en los siguientes casos, al graficar recuerde orientar la líneas según el campo en cada punto.

a) $\bar f(x,y)=(2y-x,\,x)$.

b) $\bar f(x,y)=(y,\,x)$.

c) $\bar f(x,y)=(x/2\,,\,y)$.

d) $\bar f(x,y)=(kxy^2,x^2y)$, k constante.

e) $\bar E$ según TP 11 – ítem 16.

f) $\bar E$ según TP 11 – ítem 17.

g) $\bar f(x,y,z)=(y\,,z\,,x)$.

h) $\bar f(x,y,z)=(2,1,3)$, campo constante.

14) Demuestre que si $\bar f : D\subset\Re^2\to\Re^2$ es un campo de gradientes, sus líneas de campo (que en cada punto tienen la dirección de $\bar f$) son ortogonales a sus líneas equipotenciales. ¿Cómo se enunciaría esta propiedad trabajando en $\Re^3$?.

(#) i es la intensidad de corriente eléctrica en el circuito. Unidades de medida: $[tensión]=$ Volt, $[i]=$ Ampere, $[R]=$ Ohm, $[L]=$ Henry, $[C]=$ Faradio.

15) Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de 1° orden.

a) $\begin{cases} x' + y' = e^{-t} + y \\ 2x' + y' = \text{sen}(t) - 2y \end{cases}$ con $x(0) = -2,\ y(0) = 1$.

b) $m(x'', y'', z'') = (0, 0, -mg)$ tiro libre de masa puntual m desde (0,0,0) en el instante $t = 0$ con velocidad inicial $\bar{v}(0) = (v_x, 0, v_z)$; g constante (ac. de la gravedad).

c) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \text{sen}(t) \\ x' + y = \cos(t) \end{cases}$ equivalente a $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

d) $(x', y', z') = (y + z,\ 3x + z,\ 3x + y)$.

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ con $y_1(0) = y_2(0) = 1,\ y_3(0) = -2$.

f) $(x', y') = (3x - y/2 - 3t^2 - t/2 + 3/2,\ 2y - 2t - 1)$ con $x(0) = 2,\ y(0) = 3$.

Cuestionario

a) Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

b) Defina los tipos de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

c) Si y_{p_1} e y_{p_2} son soluciones de la ec. diferencial $ay'' + by' + cy = f(x)$, demuestre que $y = y_{p_1} - y_{p_2}$ es solución de la homogénea.

d) Si y_{p_1} e y_{p_2} son respectivamente S.P. de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x)$ e $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_2(x)$ demuestre que $y = y_{p_1} + y_{p_2}$ es S.P. de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x) + f_2(x)$.

e) Halle una transformación que convierta la ecuación $y' = y\,x^{-1} + 1$ a una ecuación del tipo variables separables.

Resolución de ecuaciones diferenciales con el Mathematica

Se dispone de dos funciones, **DSolve** y **NDSolve**; trabajando con ec. diferenciales ordinarias:
DSolve[eqn, y, x] resuelve la ec.dif. **eqn** para la función **y**, con variable independiente **x**.
DSolve[eqn, y[x], x] resuelve para hallar la expresión formal de la S.G.
DSolve[{eqn,cond}, y[x], x] resuelve para hallar la expresión de la S.P. que cumple con **cond**.
DSolve[{eqn1,eqn2, ...}, {y1[x],y2[x], ...}, x] resuelve un sistema de ec. diferenciales.
NDSolve[eqn, y, {x,xmin,xmax}] encuentra una solución numérica de la ec.dif. **eqn** para la función **y**, con variable independiente **x** en el rango xmin a xmax.
NDSolve[{eqn1,eqn2, ...}, {y1,y2, ...}, {x,xmin,xmax}] es para sistema de ec. diferenciales.
***Ejemplo 1*:** resolvemos el ejercicio del ítem 11a.

DSolve[{y''[x] – y'[x] – 2 y[x] == 4 x^2 , y[0] == 1 , y'[0] == 4} , y[x] , x] (*)

$\{\{y[x] \to e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^{2})\}\}$

y[x] /. % Devuelve la expresión de y[x] según (/.) el último resultado (%).

$\{e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^{2})\}$ Aparece como lista o vector (de 1 componente).

%[[1]] Devuelve la 1° (única) componente del resultado anterior.

$e^{-x}(2 - 3e^{x} + 2e^{3x} + 2e^{x}x - 2e^{x}x^{2})$

f[x_] = Expand[%] Define f[x] expandiendo (prop. distributiva) el resultado anterior.

$-3 + 2e^{-x} + 2e^{2x} + 2x - 2x^{2}$

(*) Donde dice y'' es con *doble prima*, no es y'' con comillas.

***Ejemplo 2*:** resolvemos el ítem 12b del TP-1, trayectorias ortogonales a la familia $y = C\,e^{x}$.

fam1 = y[x] == c Exp[x] ;
Eliminate[{ fam1, D[fam1, x] }, c]
y[x] == y′[x]
% /. y'[x] –> – 1/y'[x] [(*)]

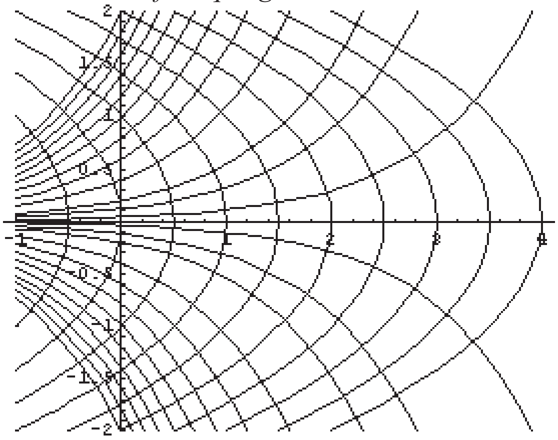
$$\text{y[x]} == -\left(\frac{1}{\text{y}'[\text{x}]}\right)$$

DSolve[y'[x] == –1/y[x], y[x], x]
{ { y[x] –> –Sqrt[–2 x + C[1]] } , { y[x] –> Sqrt[–2 x + C[1]] } }

Vemos que la respuesta es del tipo $y = \pm\sqrt{\ }$; es decir, $\boxed{y^2 = 2\,(k - x)}$.

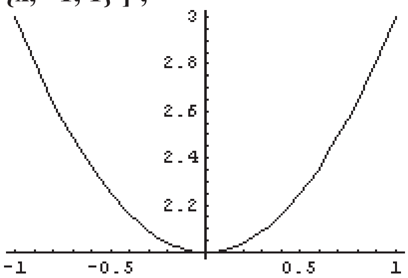
Graficamos algunas curvas de ambas familias
a = Table[Plot[c Exp[x] , {x, –1, 4}, PlotRange –> { All , {–2, 2} }] ,
{c, –2, 2, 0.2}] ;
b = Table[Plot[c Exp[x] , {x, –1, 4}, PlotRange –> { All , {–2, 2} }] ,
{c, – 0.2, 0.2, 0.08}] ;
<< Graphics`ImplicitPlot`
c = Table[ImplicitPlot[y^2 == 2 (k – x) , {x, –1, 4}], {k, –4, 4, 0.5}] ;
Show[a,b,c, AspectRatio –> Automatic];

Gráfico que genera el Show:



***Ejemplo 3*:** una resolución numérica con graficación.

rr = NDSolve[{ y'[x] == 2 x , y[0] == 2 } , y , {x, –1, 1}]
{{ y –> InterpolatingFunction[{–1. , 1. }, <>] }}
Plot[Evaluate[y[x] /. rr], {x, –1, 1}] ;



y[0.5] /. rr En esta línea pedimos el valor numérico de la S.P. para x = 0.5 .
{2.25}

[(*)] En esta línea se ordena: en el último resultado (%) reemplazar (/.) y'[x] por –1/ y'[x] .

Requerimientos teóricos para exámenes de promoción y finales

Espacio Euclídeo: producto cartesiano, definición general de función, distancia, espacio métrico, $\mathbb{R}^n$, base canónica, representación de puntos como n-upla ordenada y como combinación lineal de los versores fundamentales.
Se supone conocido: operaciones con vectores, propiedades, ortogonalidad, independencia, base de un espacio vectorial.

Conceptos de topología en $\mathbb{R}^n$: esfera abierta, entorno. Puntos: acumulación, interior, exterior, frontera, aislado. Conjuntos: abierto, cerrado, acotado. Definición de recta y segmento en $\mathbb{R}^n$ (vectorial, e interpretación cartesiana para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$), poligonal. Conjunto convexo.

Funciones: definiciones de función ($f: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$), dominio, recorrido, campos escalares y vectoriales, gráficas y conjuntos de nivel. Representaciones geométricas. Representaciones $\bar{X}$ y $\bar{f}(\bar{X})$ en el mismo gráfico (ejemplo: velocidad en cada punto de un fluido en movimiento).

Límite y continuidad: Definiciones de límite y continuidad para $f: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, límites iterados, lím vector $\Leftrightarrow$ lím componentes (enunciado) y extensión (enunciado) a continuidad, otras propiedades de límite y continuidad (enunciar).
Definición de curva en el espacio $\mathbb{R}^n$, ecuaciones vectorial y paramétricas, caso de $\mathbb{R}^2$ (ecuación cartesiana), arco de curva (abierto, cerrado, simple), límites acercándose por curvas, propiedades (enunciar).
Definición de superficie, ecuación vectorial, líneas coordenadas, casos especiales de $\bar{X}=(x,y,f(x,y))$, $\bar{X}=(x,f(x,z),z)$ y $\bar{X}=(f(y,z),y,z)$, ecuación cartesiana.

Derivadas: Definición de derivada de función vectorial de una variable, vector derivable $\Leftrightarrow$ componentes derivables (<u>demostración</u>). Punto regular de una curva, ecuaciones de recta tangente a una curva (<u>demostración</u>), caso de $\mathbb{R}^3$: plano normal (definición y <u>obtención</u> de la ecuación cartesiana).
Definición de derivadas de funciones de varias variables: respecto de un vector, direccional y parcial. Campo vectorial derivable $\Leftrightarrow$ componentes derivables (<u>demostración</u>). Propiedad de homogeneidad (<u>demostración</u>). Interpretaciones geométricas de derivada parcial y de derivada direccional de campo escalar. Teorema del valor medio en forma vectorial (enunciado). Fórmula de acotación de errores, su interpretación.
Definición de "función derivada parcial" y de derivadas parciales sucesivas. Teorema de Schwarz (enunciado).

Diferenciabilidad: definición de diferenciabilidad para funciones de $f: D\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, reconocimiento dimensión y estructura de las matrices, conclusión función diferenciable $\Leftrightarrow$ componentes diferenciables para el caso de funciones vectoriales.
Derivabilidad y continuidad de funciones diferenciables (<u>demostración</u>), matriz jacobiana (<u>obtención</u>), caso de campos escalares, definición de gradiente, cálculo de derivadas direccionales con gradiente y propiedades del gradiente (<u>demostración</u>).
Diferenciabilidad de $f \in C^1$ (enunciado). Diferencial total (definición), $\Delta x = dx$ para el caso de variable independiente (<u>demostración</u>), distintas expresiones para el diferencial total. Definición de punto regular de una superficie, plano tangente y recta normal a una superficie (dada en forma vectorial y en forma cartesiana explícita).
Aproximaciones en base al diferencial total , interpretación geométrica para funciones de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Composición de funciones: definición de función (h) como composición de dos funciones dadas, propiedades de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de h (enunciado), regla de la cadena en forma matricial (enunciado). Obtención (desde la forma matricial) de la expresión de cálculo de derivada para el caso especial del tipo $h'(t_0) = \nabla f(\bar{g}(t_0)) \cdot \bar{g}'(t_0)$, regla práctica de derivación mediante red orientada.

Funciones definidas en forma implícita: función definida implícitamente por una ecuación (definición), teorema de existencia y unicidad (enunciado), fórmula de derivación (demostración).
Curvas (planas) y superficies definidas implícitamente (hipótesis y conclusiones de regularidad); perpendicularidad del gradiente respecto de los conjuntos de nivel (demostración para curvas y para superficies). Conclusiones sobre uso del gradiente para obtención de las ecuaciones de plano tangente y recta normal a una superficie, y de recta tangente a curva plana.

Diferenciales sucesivos – fórmula de Taylor:
Definición y obtención de $d_A^2 f(h,k)$ para $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en el punto A interior a D. Generalización para $d_A^i f(H)$ con $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, hipótesis, uso del operador.
Fórmula de Taylor (orden r) para $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un $U(A)$ con $f \in C^{r+1}$. En especial, para $n=2$, con $X = (x,y) \in U(A) \wedge A = (x_0, y_0)$, obtención de la expresión:

$$f(X) = z_p(X) + \tfrac{1}{2}\, d_B^2 f(X - A) \quad \text{con} \quad B = A + \theta(X - A) \wedge 0 < \theta < 1\,,$$

donde $z = z_p(x,y)$ es la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Extremos: Definición de extremos absoluto y relativo. Condición necesaria para la existencia de extremo relativo para $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n > 1$):

- Si $\exists f'(\bar{A}, \breve{r})$ y $f(\bar{A})$ es extremo relativo $\Rightarrow f'(\bar{A}, \breve{r}) = 0$ (demostración).
- Si f es diferenciable en $\bar{A}$ y $f(\bar{A})$ es extremo relativo $\Rightarrow \nabla f(\bar{A}) = \bar{0}$ (demostración).

Punto estacionario. Condición suficiente, uso del Hessiano (enunciado).

Extremos ligados: Concepto, condición necesaria de existencia – método de los multiplicadores de Lagrange (enunciado para una o más condiciones de vínculo).

Curvas: definición de puntos y arcos simples y regulares ($\exists \bar{g}' \wedge \bar{g}' \neq \bar{0}$), arcos suaves (regular + $\bar{g}'$ continuo). Arco de curva rectificable (definición), longitud de arco de curva (definición), fórmula de cálculo de la longitud de arco (enunciado).
Definición de diferencial de arco: $ds = s'(t)\,dt = \|\bar{g}'(t)\|\,dt$, $d\bar{s} = \bar{g}'(t)\,dt = T\,ds$, con $s = s(t)$.
Concepto de triedro intrínseco, curvaturas de flexión y de torsión.

Operador ∇ : aplicación a campos escalares y vectoriales, gradiente, rotor y divergencia, propiedades: aplicación a suma y producto de campos, aplicación reiterada, Laplaciano. Condición suficiente para asegurar que $\text{rot}(\text{grad}(\bar{f}(\bar{X}))) \equiv \bar{0}$ (demostración).

Integrales de línea: integral de línea de campo vectorial (circulación), definición como $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \bar{f}(\bar{g}(t)) \cdot \bar{g}'(t)\,dt$ donde C es la trayectoria $\bar{X} = \bar{g}(t)$ con $t \in [a,b]$. Propiedades (enunciado). Trabajo (definición e interpretación física). Caso de independencia del camino (demostración). Función potencial, condición necesaria de existencia (demostración), condición suficiente (enunciado). Cálculo de función potencial (método de trabajo).

Integrales múltiples: intervalos n-dimensionales , extensión de un intervalo, casos de área y de volumen; conjuntos de extensión nula.
Integral doble: definición (con sumas inf. y superior), propiedades (enunciado), condiciones de integrabilidad (enunciado). Cálculo como integrales simples sucesivas (enunciado del teorema para región rectangular), casos de regiones simples y de regiones subdividibles en cantidad finita de regiones simples. Cambio de variables (enunciado del teorema), caso de transformaciones lineales y de coordenadas polares, líneas coordenadas, elemento de área, diferencial de área. Interpretación de las fórmulas de cálculo usadas en aplicaciones geométricas y físicas (área de región plana; masa, momentos y centro de masa de chapas planas; volúmenes).
Integral triple: definición y cálculo en intervalo cerrado y en regiones más generales, propiedades y condiciones de integrabilidad (como extensión de integrales dobles). Cambio de variables (enunciado del teorema). Coordenadas cilíndricas y esféricas, superficies coordenadas, elemento de volumen, diferencial de volumen. Interpretación de las fórmulas de cálculo usadas en aplicaciones geométricas y físicas (volumen, masa, momentos y centro de masa de cuerpos).

Área de una superficie: dada la superficie de ecuación $\overline{X} = \overline{F}(u,v) \;\wedge\; (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, interpretación geométrica del diferencial de superficie ($d\sigma = \| \overline{F}'_u \wedge \overline{F}'_v \| \, du\, dv$) en base a líneas coordenadas. Cálculo del área mediante $\iint_D d\sigma$, hipótesis de trabajo. Obtención de las fórmulas de cálculo para los casos de superficie dada en forma explícita y en forma implícita.

Integrales de superficie: Concepto de superficie orientable. Integral de superficie de un campo escalar y de un campo vectorial (flujo): definición con superficie dada en forma vectorial ($\overline{X} = \overline{F}(u,v) \;\wedge\; (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$). Obtención de las fórmulas de cálculo para los casos de superficies dadas en forma explícita y en forma implícita, análisis de la orientación del versor normal.

Teorema de Gauss o de la divergencia: enunciado, caso de campos solenoidales (caso particular de líneas de campo cerradas).

Teorema de Green: enunciado, cálculo del área de región plana con integrales de línea (<u>obtención</u> de fórmulas posibles). Caso de campos de gradiente, relacionar con independencia de la circulación respecto del camino.

Teorema de Stokes o del rotor: enunciado. Caso de campos irrotacionales, relacionar con independencia de la circulación respecto del camino.

Ecuaciones diferenciales: definiciones de expresión diferencial y ecuación diferencial. Clasificación de las ecuaciones diferenciales, orden de una ec. dif. ordinaria. Definición de ec. dif. ordinaria lineal, grado de la ecuación. Definiciones de familia de curvas, orden de infinitud, soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (general, particular y singular).
Ec. dif. ordinarias de 1° orden: unicidad de la solución (enunciado). Definiciones y métodos de resolución de los siguientes tipos: variables separables, lineales, homogéneas, totales exactas y reducibles a totales exactas mediante factor integrante dependiente de una variable.
Líneas de campo: definición, planteo del problema, casos simples de resolución.
Trayectorias ortogonales: definición, método de obtención. Líneas de campo conservativo como trayectorias ortogonales de las líneas equipotenciales (<u>demostración</u>).
Ecuaciones diferenciales ordinarias de 2° orden: existencia y unicidad de la solución (enunciado). Resolución de ecuaciones de 2° orden lineales con coeficientes constantes: solución general de la homogénea (<u>demostración</u>), solución general de la completa como $y_h + y_p$ (<u>demostración</u>). Método de variación de parámetros para la obtención de y_p (<u>demostración</u>). Método de los coeficientes indeterminados para la obtención de y_p (aplicabilidad, metodología de trabajo).
Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales a coeficientes constantes: aplicaciones, uso del álgebra lineal para su resolución (método de trabajo).

Resultados de los ejercicios
(No se incluyen gráficos ni demostraciones)

T.P. N°1

01)

	a	b	c	d	e	f
orden	3	3	3	2	1	2
grado	1	1	1	------	1	1
					lineal	lineal

02) c) $y^2 = 4x - 3$. e) existen dos soluciones: $y = 1 - x$, $y = -x^2/4$. f) $x^2 + 4y^2 = 8$.

03) a) $y = 2xy'$. b) $x + yy' = 0$. c) $y''(1-y^2) + yy'^2 = 0$. d) $y'' - 2y' + y = 0$.
e) $xy''' + 3y'' = 0 \;\wedge\; x \neq 0$. f) $yy'' = y'^2$.

04) a) $(x-1)y' = y + 1$. b) $xyy' - y^2 = 1$. c) $2xyy' = y^2 - x^2$.

05) $g(x) = K\,e^{x + \tan^{-1}(\sqrt{3}\,x)/\sqrt{3}}$, $K \in \mathbb{R}$.

06) Se comprueba. Si existe otra solución, ella es $y = 0$.

07) a) S.P.: $3(y-2)^2 + 2x^3 + 6x + 60 = 0$. b) S.G.: $y = Cxe^{x^2}$.
c) S.G.: $2\sqrt{y-1} = x^2 + C$. d) S.P.: $xy^3 + xy - x^2 - 10x + 1 = 0$.
e) S.P.: $y = -3 + \sqrt{x^2 + 9}$. f) S.P.: $y = 3\,\mathrm{Exp}[\frac{1}{2}x^2 - 2x] - 1$.

08) $y^2 - x^2 = C$.

09) $y = -2e^{x^2/2}$.

10) a) $y = Cx$ (no incluye: $x = 0$). b) $y = C$. c) $y = -x + C$ (no incluye: $x = 0$).
d) $xy^2 = C$. e) $x^2 + y^2 = C$ con $C > 0$.

11) $x^2 + 2y^2 = 2$.

12) $x^2 + (y-5)^2 = C$ con $C > 0$.

13) a) $y = Cx + x^3/2$. c) $6y = (x^2+4)^{3/2} - 2$.
b) $y = -1 + \mathrm{sen}(x) + Ce^{-\mathrm{sen}(x)}$. d) $3y = x^2\big(C - \cos(3x)\big)$.

14) Se verifica, la S.G. es: $y = 3 + Ce^{-x^2}$.

15) $y = \dfrac{\pi/2 + \mathrm{sen}(x)}{x+1} - \cos(x)$.

16) $y = \mathrm{sen}(x) - \cos(x) + 2e^{-x}$.

17) a) $x = x_0 + vt$. b) $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

18) a) $T = T_A + (T_0 - T_A)\,e^{-kt}$. b) Con $k > 0$: $T \xrightarrow[t\to\infty]{} T_A$. c) $k = 2\ln(2)$ hora^{-1}.

19) Sugerencia: halle las correspondientes ecuaciones diferenciales y verifique que se pasa de una de ellas a la otra reemplazando y' por $-1/y'$.

20) a) $y=-\frac{1}{2}x+K$. c) $x^3+y^3=C$. e) $ln|\cos(2x)|-2y^2=K$.

b) $2x+y^2=K$. d) $y=-\ln(x+K)$. f) $x^2+y^2=C,\ C>0$.

21) $a=1/3$.

22) $4\pi\sqrt{2}$.

23) $y = x^3+2$.

24) $y=A+B\,e^{2x}-(x+x^2)/4$.

25) $y = C_1\,e^x+C_2\,x+C_3$.

26) Se verifica, $y_0=6$.

27) $a^2/4$.

28) a) $(y-1)^2=C\,y^2\,(x^2-1)$. b) Se verifica, es $y^2\,(x^2-1)=32\,(y-1)^2$. c) Se verifica.

29) $y=x^3+3x$.

30) Sugerencia: recuerde que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Las soluciones son: $y=x$, $y=x^{-1}$.

31) Sugerencia: observe que $(yy')'=(y')^2+y\,y''$.

T.P. N° 2

01)

	interior	exterior	frontera	aislado	acumulación
P_1			X	X	
P_2			X		X
P_3	X				X
P_4			X		X
P_5		X			

02) a) $\partial S=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2=4\ \vee\ (0,0)\ \vee\ (2,2)\}$.

b) $\overset{o}{S}=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 0<x^2+y^2<4\}$.

c) $S'=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2\le 4\}$.

d) No es cerrado, no es abierto, es acotado.

e) $Cl(S)=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2\le 4\}\cup\{(2,2)\}$.

03) a) interior $=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2<4\ ,\ x+y>1\}$.

frontera $=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2=4\ ,\ x+y\ge 1\}\cup\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2<4\ ,\ x+y=1\}$

exterior $=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2>4\}\cup\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x+y<1\}$.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

b) interior $=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 4x^2+7y^2<2\ ,\ x>0\}$.

frontera $=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 4x^2+7y^2=2,\ x\ge 0\}\cup\{(x,y)\in\Re^2\ /\ 4x^2+7y^2<2,\ x=0\}$

exterior $=\{(x,y)\in\Re^2\ /4x^2+7y^2>2\}\cup\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x<0\}$.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

c) interior $= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 - y^2 < 3 \;,\; x + y > 2\}$.

frontera $= \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 - y^2 = 3 \;,\; x + y \geq 2\} \cup \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x^2 - y^2 < 3 \;,\; x + y = 2\}$

exterior $= \Re^2 -$ interior $-$ frontera.

Es cerrado, no es abierto, no es compacto, es conexo.

d) interior $= \phi$.

frontera $= \{ \overline{X} \in \Re^3 \,/\, \overline{X} = (a \cos(t), a \operatorname{sen}(t), a \operatorname{sen}(t)) \;,\; 0 \leq t \leq \pi/2 \}$.

exterior $= \Re^3 -$ frontera.

Es cerrado, no es abierto, es compacto, es conexo.

e) interior $= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x^2 + y^2 < z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 < 9 \}$.

frontera $= \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, (x^2 + y^2 = z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 9) \vee$
$\vee (x^2 + y^2 < z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 9) \}$.

exterior $= \Re^3 -$ interior $-$ frontera.

No es cerrado, es abierto, es acotado, no es compacto, es desconexo.

04) Analice observando su representación geométrica.

05) a) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x > -1 \wedge y > 2x\} \cup \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x < -1 \wedge y < 2x\} \}$.

b) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y > x \wedge -1 < x \leq 1\}$.

c) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, -1 \leq y + x^2 \leq 1\}$.

d) $D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, z > x + y + 1\}$.

e) Puntos debajo de la recta $x + y = 2$ en 1° y 3° cuadrante, excluidos los ejes coordenados.

f) Semiplano $y \geq 0$ salvo los puntos de la recta $y = -x$ y los puntos del eje y.

g) $D = \{(x, y, z) \in \Re^3 \,/\, y < 1\}$.

h) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, x \leq x^2 + y^2 < 2x\}$.

i) $D = \Re^2$.

j) $D = \{(x, y) \in \Re^2 \,/\, (y \geq -2x \wedge y \geq 0) \vee (y \leq -2x \wedge y \leq 0)\} - \{(0,0)\}$.

06) En todos los casos se describen conjuntos de nivel k para distintos valores posibles de k.

a) Hipérbolas equiláteras de ecuación $x\,y = k + 2$ con $k \neq -2$ (1º y 3º cuadrante si $k > -2$, 2º y 4º cuadrante si $k < -2$), incluidos ambos ejes de coordenadas (caso de $k = -2$).

b) Hipérbolas equiláteras de ecuación $x\,y = \ln(k)$ con $k > 0 \wedge k \neq 1$ (2º y 4º cuadrante si $0 < k < 1$, 1º y 3º cuadrante si $k > 1$), incluidos ambos ejes de coordenadas (para $k = 1$).

c) Paraboloides de ecuación $z = x^2 + y^2 - k$, $k \in \Re$.

d) Líneas de ecuación $y = k - |x|$, $k \in \Re$.

e) Puntos del espacio xyz cuya distancia al origen de coordenadas es igual a $e^{k/2}$ con $k \in \Re$, la ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = e^k$.

f) Para $k \in \Re - \{0\}$: circunferencias de ecuación $(x-(2k)^{-1})^2 + y^2 = (2k)^{-2}$ excluido el origen de coordenadas, para $k = 0$: el eje y salvo el punto $(0,0)$.

g) Debe ser $k \geq 0$. Para $k = 0$: el plano xy. Para $k > 0$ paraboloides de revolución alrededor del eje z de ecuaciones $z = k(x^2 + y^2)$ o $z = -k(x^2 + y^2)$ excluyendo el punto $(0,0,0)$.

07) a) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \geq 0\}$, conj. positiv.: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

inter. planos: en $z=0$: (0,0), en $y=0$: parábola $z = x^2$, en $x=0$: parábola $z = y^2$.

b) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \geq 0\}$, conj. positiv.: $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

inter. planos: en $z=0$: (0,0), en $y=0$: semirrectas $z = |x|$, en $x=0$: semirrectas $z = |y|$.

c) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ 0 \leq z \leq 3\}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 < 9\}$.

inter. planos: en $z=0$: circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, en $y=0$: semicircunferencia $z = \sqrt{9 - x^2}$, en $x=0$: semicircunferencia $z = \sqrt{9 - y^2}$.

d) conj. imagen: $\mathbb{R}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y < 2\}$,

inter. planos: en $z=0$: recta $x + y = 2$, en $y=0$: recta $x + z = 2$, en $x=0$: recta $y + z = 2$.

e) conj. imagen: $\{z \in \mathbb{R} / \ z \leq 2\}$, conj. positiv.: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$,

inter. planos: en $z=0$: rectas $x = \pm\sqrt{2}$, en $y=0$: parábola $z = 2 - x^2$, en $x=0$: recta $z = 2$.

f) conj. imagen: $\{y \in \mathbb{R} / \ y \geq -1\}$, conj. positiv.: $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 / \ (x-1)^2 + z^2 > 1\}$.

inter. planos: en $z=0$: parábola $y = (x-1)^2 - 1$, en $y=0$: circunferencia $(x-1)^2 + z^2 = 1$, en $x=0$: parábola $y = z^2$.

08) a) por ejemplo: $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

b) por ejemplo: $f(x,y) = \sqrt{9 - (x+1)^2 - y^2}$.

c) por ejemplo: $\bar{f}(x,y) = (\ln(3 - x - y), \sqrt{x + y + 1})$. ¿Cómo sería con campo escalar?.

d) por ejemplo: $f(x,y) = [(x-1)^2 + (y-2)^2]^{-1/2}$.

09) a) paraboloide hiperbólico, b) hiperboloide de dos hojas, c) elipsoide, d) --, e) plano, f) --.

10) a) semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{1 - x^2}$. b) trozo de hélice circular con $0 \leq z \leq \pi$.

11) b) $\overline{X} = (2\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u), 2\cos(u))$ con $0 \leq u \leq \pi/2$.

c) Sobre *xy*: $\overline{X} = (2\cos(u), 2\,\mathrm{sen}(u), 0) \wedge u \in [0, \pi/2]$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ con $x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

Sobre *xz*: $\overline{X} = (u, 0, u) \wedge u \in [0,2]$; $\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$ con $0 \leq x \leq 2$.

Sobre yz: $\overline{X} = (0\,,2\,\text{sen}(u)\,,2\cos(u)) \;\wedge\; u \in [0,\pi/2]$; $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ con $y \geq 0 \wedge z \geq 0$

12) interior: $\overset{o}{S} = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

puntos aislados: $\{(n^{-1},0) \in \Re^2 \;/\; n \in \mathbb{N}\,,\, n > 1\}$.

frontera: $\partial S = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = 2 \vee (n^{-1},0),\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$,

conjunto derivado: $S' = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \cup \{(0,0)\}$.

clausura: $Cl(S) = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \;\vee\; (n^{-1},0),\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$

T.P. N° 3

01) a) $L = 2$. b) $\nexists L$. c) $L = 0$. d) $\nexists L$.

02) Al no aclararse otra cosa, $(\text{sen}(u)/|u|\,,\, u\ln(u))$ tiene dominio natural $\mathbb{R}^+$ y ambas componentes tienen límite en $\mathbb{R}^+$.
En cambio $(\text{sen}(u)/|u|,\, u)$ está definida en $\mathbb{R}-\{0\}$, donde no existe el $\lim\limits_{u\to 0} \text{sen}\,(u)/|u|$.

03) Existe, $\overline{L} = (1/2,\, 1,\, 1)$.

04) a) Es curva (recta en $\Re^2$). b) es curva. c) es curva. d) es curva (recta en $\Re^3$).
e) No es curva pues el dominio es desconexo. f) no es curva pues $\overline{g}$ es discontinua en 0.

05) a) $L = 1/2$. b) $L = 0$. c) $\nexists L$. d) $\nexists L$. e) $L = 0$. f) $\nexists L$. g) $\nexists L$. h) $\nexists L$. i) $\nexists L$.
j) $\nexists L$. k) $\nexists L$. l) $L = 0$. m) $\nexists L$. n) $L = 0$. o) $\nexists L$. p) $L = 0$. q) $\nexists L$.

06) a) $D = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, |x| < 1 \wedge x \neq 0\}$.
b) $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(1,y_0)} f(x,y) = 0$.

07) a) $\nexists L$. b) $\nexists L$. c) $L = 1/8$. d) $\nexists L$. e) $\nexists \overline{L}$. f) $\overline{L} = (0\,,1/2)$.

08) Por ejemplo $\overline{X} = (x,\, 2,\, x^2 + 4)$ con $x \in \Re$ está incluida en S por ser una de sus líneas coordenadas correspondientes a la representación $\overline{X} = (\,x, y,\, x^2 + y^2\,)$ con $(x,y) \in \Re^2$; para $x = 1$ la imagen es el (1,2,5). Es curva por ser imagen de un intervalo real ($\Re$) a través de una función vectorial continua (componentes continuas: una constante y las otras del tipo polinomio).

09) a) Por ejemplo $C: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x^2 \end{cases}$ (1) , también podría ser $C: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2y \end{cases}$ (2).

b) La forma (2) indicada en la respuesta (a) muestra que los puntos de C están sobre el plano de ecuación $z = 2y$, por lo tanto C es una curva plana.

c) La ecuación cartesiana de la superficie es $z = x^2 + y$, y con ella cumplen todos los puntos de C.

10)

	a	b	c	d	e	f	g	h
continuo		X	X					X
no continuo	X			X	X	X	X	

11) a) No. b) Si, con $f(x,0) = x^2$. c) Si, con $\overline{g}(0) = (1,0,0)$. d) Si, con $\overline{g}(0) = (1,0)$.

12) a) $\Re^2 - \{(x,0) \in \Re^2 \,/\, -2 < x < 2\}$. b) $\Re^2$.

13) a) Comience demostrando que $\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right| < 1$ en todo entorno reducido de (0,0).

b) No se puede, todo punto (x,y) de dicha línea tiene coordenada $x \geq 1$.

14) Comience por expresar los productos escalar (para h) y vectorial (para $\overline{w}$) en función de las componentes de $\bar{f}$ y de $\overline{g}$.

T.P. N° 4

01) En cada caso se indica una respuesta posible a lo requerido.

a) Ecuación C: $\overline{X} = (x, x^2, 5-x^2) \wedge x \in \Re$, recta tg.: $\overline{X} = (2+u, 4+4u, 1-4u) \wedge u \in \Re$.
Plano normal: $x+4y-4z=14$, $\overline{X} = (14-4y+4z, y, z) \wedge (y,z) \in \Re^2$.

b) Ecuación C: $\overline{X} = (x, x-1, 2x-1) \wedge x \in \Re$, recta tg.: $\overline{X} = (2+u, 1+u, 3+2u) \wedge u \in \Re$.
Plano normal: $x+y+2z=9$, $\overline{X} = (x, y, (9-x-y)/2) \wedge (x,y) \in \Re^2$.

c) Ecuación C: $\overline{X} = (2\cos(t), 2\,\text{sen}(t), 2) \wedge t \in [0, 2\pi]$, recta tg.: $\overline{X} = (u, 2, 2) \wedge u \in \Re$.
Plano normal: $x = 0$, $\overline{X} = (0, y, z) \wedge (y,z) \in \Re^2$.

Las tres son curvas planas, pertenecen a los planos de ecuación:
a) $y+z=5$. b) $z=x+y$. c) $z=2$.

02) a) No. b) Si, en (6, 0.5, 5.5) y en (15, 2, 7). c) No.

03) Por ejemplo, el plano $y=0$ contiene a los puntos $(2,0,0)$, $(-2,0,\pi)$ y $(2,0,2\pi)$ de la curva; la curva no es plana pues $(0,2,\pi/2) \in C$ pero no está en el plano antes mencionado.

04) a) $f'_x(x,y) = 4x^3+2y+y^3$, $f'_y(x,y) = 2x+3xy^2$ ambas definidas en $\Re^2$.

b) $f'_x(x,y,z) = 2ye^{2x}$, $f'_y(x,y,z) = e^{2x}+3ze^{3y}$, $f'_z(x,y,z) = e^{3y}$ las tres def. en $\Re^3$.

c) $f'_x(x,y) = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = 2xye^{x^2+y^2}$ ambas definidas en $\Re^2$.

d) $f'_x(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ ambas definidas en $\{(x,y) \in \Re^2 \,/\, x \neq 0\}$.

e) $f'_x(x,y) = -e^{\text{sen}(x)}$, $f'_y(x,y) = e^{\text{sen}(y)}$ ambas definidas en $\Re^2$.

f) $f'_x(x,y) = 2xe^{(x^2+y^2)^2} - e^{x^2}$, $f'_y(x,y) = 2ye^{(x^2+y^2)^2}$ ambas definidas en $\Re^2$.

05) a) $f'_x(1,2) = 10$, $f'_y(1,2) = 2$. c) $f'_x(0,0) = 0$, $\nexists f'_y(0,0)$.
b) $\nexists f'_x(1,1)$, $f'_y(1,1) = 2$. d) $\nexists f'_x(0,0)$, $\nexists f'_y(0,0)$.

06) a) Por ejemplo con límite por rectas. b) $f'(\overline{0}, \breve{r}) = 0$ sólo existe para los $\breve{r}$ del enunciado.

07) $f'(\overline{0}, \breve{r}) = 0 \;\; \forall \breve{r} \in \Re^2$. La discontinuidad por ejemplo con límite por $y = x^3$

08) a) Se demuestra usando definición. b) Se verifica.

09) Comentario: tenga en cuenta que en este caso la regla práctica de derivación no permite concluir sobre la existencia de la derivadas parciales en el origen.

10) $f'((1,-1),\breve{r}) = -22/5$.

11) a) sólo es derivable con resultado 0 según (0,1), $(0,-1)$, (1,0) y $(-1,0)$.

b) $f'(\bar{0},(u,v)) = \begin{cases} v^2/u & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$ con $u^2 + v^2 = 1$.

12) a) 1° y 2° en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$.

b) 1° y 2° en $\{(x,y) \in \Re^2 \ / \ x \neq 0 \wedge y > 0\}$.

c) f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} en $\Re^2 - \{\bar{0}\}$; f'_y, f''_{yx}, f''_{yy} $\Re^2$.

d) 1° y 2° en $\{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ yz > 0\}$.

13) a) Ángulo $= \arccos(2\sqrt{13/53})$. b) tiempo = 2 segundos.

14) Ayuda, recuerde la definición de transformación lineal.

15) $\bar{k} = (-2,2)$.

16) Suponiendo g derivable en entorno de $x_0 = 1$, $g(x) = 2x^{-1}$.

17) Suponiendo g'' existente, $g(x) = x - x^2$.

18) Suponiendo g'' existente, $g(t) = 1 + \text{Exp}[2(t-1)]$.

19) Se verifica por simple cálculo y reemplazo.

20) Se demuestra por simple cálculo y reemplazo.

21) Según se enuncia, debe trabajar derivando $f(x,y,z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ con k constante.

22) Observe que, por ejemplo, $P(x,y,z) = \dfrac{k\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

23) $f'_y(1,0) = 0$.

24) El dibujo intenta mostrar que la intersección de la superficie con el plano xz es una recta paralela al eje x.

T.P. N° 5

01) a) $D\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 \\ -\dfrac{2\cos(t)}{(2t-\pi)^2} - \dfrac{\text{sen}(t)}{2t-\pi} \end{pmatrix}$, $W = \{t \in \Re \ / \ t \neq -1 \wedge t \neq \pi/2\}$.

b) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} & \dfrac{x^3 - x y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$, $W = \Re^2 - \{\bar{0}\}$.

c) $D\bar{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ \dfrac{2xz}{x^2+z^2} & 0 & \dfrac{2z^2}{x^2+z^2} + \ln(x^2+z^2) \end{pmatrix}$, $W = \{(x,y,z) \in \Re^3 \ / \ x^2 + z^2 \neq 0\}$.

d) $D\bar{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} k\,r^{-3}(1-3x^2/r^2) & -3k\,x\,y/r^5 & -3k\,x\,z/r^5 \\ -3k\,x\,y/r^5 & k\,r^{-3}(1-3y^2/r^2) & -3k\,y\,z/r^5 \\ -3k\,x\,z/r^5 & -3k\,y\,z/r^5 & k\,r^{-3}(1-3z^2/r^2) \end{pmatrix}, W=\Re^3-\{\bar{0}\}$.

e) $Df(x,y)=\begin{cases} \left(\dfrac{y^6-x^2y^2}{(x^2+y^4)^2} \quad \dfrac{2x^3y-2xy^5}{(x^2+y^4)^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ (\;0 \qquad 0\;) & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$, $W=\Re^2-\{\bar{0}\}$.(*)

f) $D\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ 2(x-y) & 2(y-x) \end{pmatrix}$, $W=\Re^2$.

02) Si existe, $f'((0,0),(2,-1))=2$.

03) $f'(\bar{0},(u,v))=\begin{cases} u^2/v & \text{si } v\neq 0 \\ 0 & \text{si } v=0 \end{cases}$ con $u^2+v^2=1$, no es cont. en $\bar{0}\Rightarrow$ no es difer. en $\bar{0}$.

04) a) $f'(\bar{0},\breve{r})=0\ \ \forall\breve{r}\in\Re^2$. No es diferenciable en $\bar{0}$, por no ser continua en el origen.

b) $f'(\bar{0},(u,v))=u^2v$ con $u^2+v^2=1$.

Direcciones de derivada máxima: $(\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$ y $(-\sqrt{2/3},1/\sqrt{3})$.

Direcciones de derivada nula: $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$.

No es diferenciable en el origen. Si lo fuera $f'(\bar{0},\breve{r})=\nabla f(\bar{0})\cdot\breve{r}\ \ \forall\breve{r}\in\Re^2$, como en este caso resulta $\nabla f(\bar{0})=\bar{0}$ y las derivadas deberían ser nulas en toda dirección.

05) La función no es continua en $(0,0)\Rightarrow$ no es diferenciable en $(0,0)$, por lo tanto la gráfica de f no admite plano tangente en $(0,0,0)$.

06) Únicamente en el punto $(1,0,1)$, ecuación del plano: $z=1$.

07) Para el límite observe que: $\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=x\,\frac{x^2}{x^2+y^2}-x\,\frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Derivada direccional: $f'(\bar{0},(u,v))=u^3-uv^2\ \ \forall\breve{r}=(u,v)\in\Re^2$.

Por otra parte, $f'((0,0),(u,v))\neq\nabla f(0,0)\cdot(u,v)\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

08) a) 4.05. b) 2.02.

09) Aplicar $f(\bar{X})\cong f(\bar{A})+\nabla f(\bar{A})\cdot(\bar{X}-\bar{A})$ (aproximación mediante diferencial primero).

10) Plano tangente: $x+3y+4z=8$. Recta normal: $r_0=\begin{cases} y-3x=8 \\ z-4x=9 \end{cases}$.

11) $(-1/2,0,-1/4)$ y $(0,1,0)$.

12) $(0,0,0)$ y $(2,4,4)$.

13) a) $\breve{r}_{\text{máx}}=(-7/\sqrt{85},-6/\sqrt{85})$, $\breve{r}_{\text{mín}}=(7/\sqrt{85},6/\sqrt{85})$,

$\breve{r}_{\text{nula}_1}=(-6/\sqrt{85},7/\sqrt{85})$, $\breve{r}_{\text{nula}_2}=(6/\sqrt{85},-7/\sqrt{85})$.

b) $\breve{r}_{\text{máx}}=(1,0,0)$, $\breve{r}_{\text{mín}}=(-1,0,0)$, $\breve{r}_{\text{nula}}=(0,u,v)\ \forall(u,v)\in\Re^2\,/\,u^2+v^2=1$.

(*) Acercándose por rectas es sencillo probar que f'_y no es continua en el origen.

14) $5+11\sqrt{3}/2$.

15) $a,b\in\Re$ tal que $a=(b-2)/4$ y $b\neq 2/3$.

16) $\breve{r}_{máx}=(2/\sqrt{14}\,,1/\sqrt{14}\,,3/\sqrt{14})$.

17) a) $f'(\overline{A},(5{,}9))=2$, b) $f'(\overline{A},\breve{r}_{\text{máx}})=2\sqrt{5}$, c) $f\left(\overline{A}+(0.01,-0.02)\right)\cong 3.08$.

18) $f(0.98,0.01)\cong 1.02$.

19) $z=10x-5y+5$, $f(1.01,1.97)\cong 5.25$.

20) Sí. Dado que la superficie admite plano tangente, f es diferenciable en $(1,2)$; entonces se puede usar el gradiente para calcular la derivada direccional. Resulta: $f'((1,2),\breve{r})=-5\sqrt{2}/8$.

21) a) 0.88 ± 0.04 kΩ.
b) 39.2 ± 1.6 cm^3.
c) para $z=x\,y$ y $z=x/y$: $\varepsilon_{\text{rel}_z}=\varepsilon_{\text{rel}_x}+\varepsilon_{\text{rel}_y}$.
para $z=x^2y^3$: $\varepsilon_{\text{rel}_z}=2\,\varepsilon_{\text{rel}_x}+3\,\varepsilon_{\text{rel}_y}$.
d) 19.5 ± 0.975 kΩ. Es decir, 19.5 kΩ al 5%.

Cuestionario, ítem e):
Verifique que la f propuesta cumple con la definición de diferenciabilidad en (0,0).
Por otra parte,

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2+y^2}{3x^{2/3}\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,y)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Con lo cual f'_x no es continua en (0,0), esto puede demostrarse analizando límites por curvas. Por ejemplo, acercándose por $x=y^2$:

$$\lim_{y\to 0} f'_x(y^2,y)=\infty.$$

También puede analizarse por $x=y^{3/2}$ con $y\geq 0$ resulta $\lim\limits_{y\to 0^+} f'_x(y^{3/2},y)=1/3$.

T.P. N° 6

01) a) Ambas quedan definidas con dominio $\Re^2$.

$$D(\bar{f}\circ\bar{g})(1,1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix};\quad D(\bar{g}\circ\bar{f})(1,1)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

b) Dominio de $f\circ\bar{g}=\{u\in\Re\ /\ u\leq 2\}$; dominio de $\bar{g}\circ f=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ y\geq 0\}$.

$$D(f\circ\bar{g})(1)=(\ 0.5\ );\quad D(\bar{g}\circ f)(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1 & -1/2\end{pmatrix}.$$

c) Ninguna queda definida; tampoco sus matrices jacobianas.

d) Dominio de $\bar{f}\circ\bar{g}=\{(u,v,w)\in\Re^3\ /\ u\leq 1\}$;
dominio de $\bar{g}\circ\bar{f}=\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x\,y^2\leq 1\}$

$$D(\bar{f}\circ\bar{g})(0,1,1)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -3/2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix};\quad D(\bar{g}\circ\bar{f})(0,1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

02) Por ejemplo, $h = f \circ \bar{g}$ si

$f : D_f \subset \Re^2 \to \Re \;/\; f(u,v) = u \ln(v)$ con $D_f = \{(u,v) \in \Re^2 \;/\; v > 0\}$ y

$\bar{g} : D_{\bar{g}} \subset \Re^2 \to \Re^2 \;/\; \bar{g}(x,y) = (x, 1 - xy)$ con $D_{\bar{g}} = \{(x,y) \in \Re^2 \;/\; xy < 1\}$.

03) a) $f(u,v) = 2uv - 2\sqrt{v-u}$, $g(x,y) = (x - y^2, x + 2xy - 1)$.

b) -3. c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 15z = 92 \end{cases}$. d) No.

04) $f'_x(0,1) = -1$.

05) $\nabla h(0,0) = (0,-2)$. No se puede pues $\nexists f'_u(1,-1) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(1,-1)$.(*)

06) 0.

07) Se verifica.

08) $a = 2/\sqrt{5}$ o bien $a = -2/\sqrt{5}$.

09) a) $\{(x,y) \in \Re^2 - \{\bar{0}\} \;/\; x^2 + y^2 = 5x/2\}$. Es decir: puntos de la circunferencia con centro en $(5/4, 0)$ y radio $5/4$, salvo el origen de coordenadas.

b) $\breve{r}_{\text{máx}} = (-3/5, 4/5)$. c) $3\sqrt{2}/50$. d) $\dfrac{6\cos(t)\,(1 - 3\,\mathrm{sen}^2(t))}{(3\,\mathrm{sen}^2(t) + 1)^2}$. e) 1.4 %.

10) $f(x,y) \cong 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$.

11) a) $\nabla f(1,-2) = (-1/3, -1/3)$.

b) Plano tangente: $x + y + 3z = 2$. Recta normal: $\bar{X} = (1+t, -2+t, 1+3t)$, $t \in \Re$.

c) Para $\pi/3$: $f'((1,-2), \breve{r}_1) = -(1+\sqrt{3})/6$. Para $-\pi/3$: $f'((1,-2), \breve{r}_2) = (-1+\sqrt{3})/6$.

12) $(-1/2, -1/2, 1)$ y $(1/2, 1/2, -1)$.

13) $-66\sqrt{2/7}$.

14) $f'((x_0, y_0), \breve{r}) = 2/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

15) Se cumple, demostración a realizar por el alumno.

16) No.

17) $\breve{r}_{\text{nula}_1} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $\breve{r}_{\text{nula}_2} = (-2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

18) $x + 4y + 6z + 18 = 0$.

19) Satisface, demostración a realizar por el alumno.

20) Se verifica, justificación a realizar por el alumno.

21) $h'((1,1), \breve{r}_{\text{máx}}) = 5/2$.

22) $h(2.98, 2.01) \cong 52.4175$.

23) Se verifica pues $h'(2) = -5/2 < 0$.

24) $g(x) = 2/(x-1)$.

25) $f(u) = u + C$ con C constante arbitraria.

(*) Observe que en este caso h resulta infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}^2$, aún con f no diferenciable.

T.P. N° 7

01) a) $p(x,y) = 4 + 11(y-2) + (x-1)^2 - (x-1)(y-2) + 6(y-2)^2 + (y-2)^3$.

b) $f(1,2) = 4$. Se puede calcular evaluando el polinomio dato en (1,2).

02) Se verifica.

03) a) $f(x,y) \cong -4 + \frac{7}{4}(x-2) - 2(y-3) + \frac{3}{64}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(x-2)(y-3)$.

b) $f(x,y) \cong (x-1) + (y-2) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - \frac{1}{2}(y-2)^2$.

c) $f(x,y,z) \cong \frac{(x-1)}{2} - \frac{(y-2)}{2} + \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{8} + \frac{z^2}{2} - \frac{(x-1)(y-2)}{4} +$
$+ \frac{3(x-1)z}{2} - \frac{(y-2)z}{2}$.

d) $f(x,y,z) \cong 1 - x + z - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - xy - xz$.

04) a) 0.96 . b) 4.0025 . c) 2.97 .

05) $g(x) = K\, e^{x/y_o}$ con K constante arbitraria.

06) a) $f(0,0) = 2$ mínimo local.

b) $f(0,0) = 0$ no es extremo local.

c) $f(0,0) = 0$ no es extremo local.

Sugerencia para “b)” y “c)”:

Dibuje el conjunto de nivel $f(0,0)$, la región $S^{>}$ donde $f(x,y) > f(0,0)$ y la región $S^{<}$ donde $f(x,y) < f(0,0)$; luego observe qué valores adopta f alrededor de (0,0).

07) Note que $f(-a,a) = 0$ y $f(x,y) \geq 0$ en todo punto, en especial en un entorno de $(-a,a)$.

08) a) $f(0,0)$ mínimo relativo.

b) No produce extremos.

c) $f(a,a)$ mínimo absoluto (en sentido amplio) para todo $a \in \Re$.

d) No produce extremos.

e) f produce mínimo absoluto en sentido amplio $\forall (x,y) \;/\; (x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$.
f produce máximo local y absoluto en sentido estricto en el punto (4,2).

f) No produce extremos.

09) $f(1,0) = 1/2$ máximo absoluto, $f(0,0) = 0$ mínimo absoluto.

10) Los puntos $(0,y)$ con $y \in \Re$, es decir, los puntos del eje y.

11) Máxima en $(1,\sqrt{3})$ y $(1,-\sqrt{3})$; mínima en $(-4/3, 2\sqrt{5}/3)$ y $(-4/3, -2\sqrt{5}/3)$.

12) $f(1,1) = 4$ es máximo local.

13) Observe que la suma de números positivos siempre resulta mayor que el mayor de ellos.

14) Aplique derivada de función definida implícitamente y derivada de la composición de funciones. Por ejemplo, para obtener la expresión de $f''_{xy}(x_o, y_o)$ tenga en cuenta que:

$$f'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} \quad \text{con } z = f(x,y).$$

15) $\varphi_1(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$, $\varphi_1(0,0)$ máximo; $\varphi_2(x,y) = -\sqrt{36 - x^2 - 4y^2}$, $\varphi_2(0,0)$ mínimo.

16) $\varphi_1(x,y) = \sqrt{\frac{1 - x^2 - 4y^2}{9}}$, $\varphi_1(0,0)$ máximo; $\varphi_2(x,y) = -\sqrt{\frac{1 - x^2 - 4y^2}{9}}$, $\varphi_2(0,0)$ mínimo.

17) a) $f(-1,-1) = -32$ es máximo local, $f(1,1)=32$ es mínimo local.
b) $f(-1/3,-1/3)=-5/27$ no es extremo local, $f(1,1)=1$ es máximo local.
c) f produce mínimo relativo en sentido amplio en todo punto de la recta $4x-3y=2$.
d) No produce extremos.
e) $f(1/8,-3/8,1/4)=-1/64$ es mínimo relativo.
f) $f(-8,-16,-4)=112$ es máximo relativo; $f(2,4,1)=-13$ es mínimo relativo.

18) El más cercano: (1,5). El más alejado: $(1,-1)$.

19) a) diámetro = altura = $\sqrt{2A/(3\pi)}$; b) diámetro = altura = $(4\ V/\ \pi)^{1/3}$.

20) Los puntos a unir son el $(1,1/4)$ de la recta con el $(1/2,-1/4)$ de la parábola, la distancia entre ambos (longitud del camino a construir) es de $1/\sqrt{2}$.

T.P. N° 8

01) Por ejemplo:

a) $\overline{X} = (t, t^2) \wedge t \in [-1,2]$; $\overline{X} = (2-u, (2-u)^2) \wedge u \in [0,3]$.
long. $= (2\sqrt{5} + 4\sqrt{17} + \text{argsenh}(2) + \text{argsenh}(4))/4 \cong 6.12573$.

b) $\overline{X} = (2+2\cos(t), 1+2\text{sen}(t)) \wedge t \in [0,2\pi]$;
$\overline{X} = (2+2\text{sen(u)}, 1+2\cos(u)) \wedge u \in [0,2\pi]$.
long. $= 4\pi$.

c) $\overline{X} = (a\cos(t), b\text{sen}(t) \wedge t \in [0,2\pi]$; $\overline{X} = (a\text{sen(u)}, b\cos(u) a\text{sen(u)}) \wedge u \in [0,2\pi]$.
long. $= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\text{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt$.

d) $\overline{X} = (2+t, 3-t, 2t-1) \wedge t \in [0,1]$; $\overline{X} = (3-u, 2+u, 1-2u) \wedge u \in [0,1]$.
long. $= \sqrt{6}$.

e) $\overline{X} = (t, t^2, 2-t) \wedge t \in [0,2]$; $\overline{X} = (2-u, (2-u)^2, u) \wedge u \in [0,2]$.
long. $= 3\sqrt{2} + \text{argsenh}(2\sqrt{2})/2 \cong 5.12401$.

f) $\overline{X} = (2\cos(t), 2\text{sen}(t), 2) \wedge t \in [0,2\pi]$; $\overline{X} = (2\text{sen(u)}, 2\cos(u), 2) \wedge u \in [0,2\pi]$.
long. $= 4\pi$.

g) $\overline{X} = (9v, 3-v, 3+v) \wedge v \in [1,2]$; $\overline{X} = (9(3-t), t, 6-t) \wedge t \in [1,2]$.
long. $= \sqrt{83}$.

02) $4+\pi/2$.

03) $9\sqrt{5}$.

04) $k\,(\sqrt{3/2} - \sqrt{2}/6)$; k constante de proporcionalidad.

05) G = (8/9 , 16/9 , 4/3).

06) Sugerencia: recuerde que $\bar{h}\cdot\bar{h} = \|\bar{h}\|^2$ y derive ambos miembros en las condiciones del enunciado.

07) a) $\bar{X} = \left(2\cos\left(\dfrac{\sqrt{5}\,\pi+s}{2\sqrt{5}}\right),\ 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\sqrt{5}\,\pi+s}{2\sqrt{5}}\right),\ \dfrac{2(\sqrt{5}\,\pi+s)}{\sqrt{5}}\right) \wedge s \in [-\sqrt{5}\,\pi, 3\sqrt{5}\,\pi]$.

b) curv. flexión $= 0$, plano osc. y curv. torsión: no quedan definidos.

d) $cf = 1/R$ con R radio de la circunferencia.

e) (–278/5 , –144/5 , 293/12).

08) En $\mathbb{R}^2$: observe que si $\bar{X} = \underbrace{(x(t), y(t))}_{\bar{g}(t)}$, entonces $d\bar{s} = (dx, dy)$.

11) $-4/3$.

12) 16/21.

13) 122/3; Pto.inic. = (0,1,2), Pto.final = (2,9,6); no ($D\bar{f}$ no es simétrica).

14) Cuando admite función potencial, se indica la familia de funciones a la cual pertenece:

a) $x + y + x\,y - x^2 y + C$. c) $yz + sen(xz) + C$.

b) No admite función potencial. d) $x^2 + x\,y + x + z\,y + z^2 + C$.

16) Se demuestra. Se verifica. El campo no admite función potencial en su dominio.

17) Se cumple, la expresión de la función potencial es $x^2 y - x^3 + x + 2$.

18) $g(x) = x^2 + 2$.

19) 27.

20) Demuestre que la circulación en camino cerrado no es nula.

21) $a = b = 3$.

T.P. N° 9

01) a) 125/24. b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{2}$. c) 8/3. d) 0.5. e) 20 arcsen$(1/\sqrt{5}) \cong 9.27295$.

f) $3\sqrt{3} + 4\pi/3 \cong 9.38494$.

02) a) 2. b) 0. c) 2. d) 1. e) 9.5. f) 1– ln(2).

03) Llamando r al radio y k a la constante de proporcionalidad: masa$= \dfrac{4kr^3}{3}$; $G = (0,0)$.

05) a) $\dfrac{1}{3}$. b) $\dfrac{e-1}{2}$. c) $\dfrac{125}{6}$.

06) a) 2. b) $3\pi ab$. c) 1638.4. d) 6. e) $3\pi/2$.

07) a) $2\sqrt{2}\pi$. b) $\sqrt{2}\pi(e^4 - 1)/8 \cong 29.7663$.

08) a) π.

09) 4 .

10) a) $3\pi/4$, planteo en cartesianas: $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy$.

b) 4, planteo en cartesianas: $\int_0^{\sqrt{3}} x\,dx \int_{-x/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\,x} dy$.

11) $\frac{32}{15}\pi$, planteo en cartesianas: $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz$.

12) a) $\frac{68}{5}$. b) 9. c) $\frac{16}{9}a^3(3\pi-4)$. d) $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$. e) $\frac{3}{10}$.

f) 36π. g) $\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{7}{12}$. h) 256π.

13) $G = (38/25\ ,\ 52/25\ ,\ 6/5)$.

14) $k\ 8192/15$.

15) $\frac{\pi h^3}{3}[\mathrm{tg}(\omega)]^2$.

16) 0 .

17) a) $k\frac{128}{15}\pi$. b) $k\pi\sqrt{2}/8$. c) $72k$.

18) $64\pi/3$.

T.P. N° 10

01) a) param.: $\overline{X} = (u, u^2, v) \wedge (u,v) \in \Re^2$, cart.: $y = x^2$.

b) param.: $\overline{X} = (u+v\ ,\ u^2+v\ ,v) \wedge (u,v) \in \Re^2$, cart.: $y - z = (x-z)^2$.

c) param.: $\overline{X} = (2\cos(u)\ ,\ 2\,\mathrm{sen}(u)\ ,v)$ con $u \in [0,2\pi]$, $v \in \Re$; cart.: $x^2 + y^2 = 4$.

d) param.: $\overline{X} = (u+2v\ ,2u+v\ ,u^2) \wedge (u,v) \in \Re^2$, cart.: $(2y-x)^2 = 9z$.

02) a) param.: $\overline{X} = (uv, u^2v, 1-v) \wedge (u,v) \in \Re^2$, cart.: $x^2 = y\,(1-z)$.

b) param.: $\overline{X} = (u,v,0) \wedge (u,v) \in \Re^2$, cart.: $z = 0$.

c) param.: $\overline{X} = (2v\cos(u)\ ,\ 2v\,\mathrm{sen}(u)\ ,\ 2-2v)$ con $u \in [0,2\pi]$, $v \in \Re$;

cart.: $x^2 + y^2 = (z-2)^2$.

d) param.: $\overline{X} = (v\ ,2v\ ,w) \wedge (v,w) \in \Re^2$, cart.: $y = 2x$.

03) a) $\overline{X} = (2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\ 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ 2\cos(\theta))$ con $\theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]$.

b) $\overline{X} = (2\cos(u),\ \mathrm{sen}(u), v)$ con $u \in [0,2\pi], v \in \Re$.

c) $\overline{X} = (6\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi),\ 3\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi),\ 2\cos(\theta))$ con $\theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]$.

d) $\overline{X} = (u, v, u^2+v^2) \wedge (u,v) \in \Re^2$.

05) a) 57/8. b) $48\pi\sqrt{3}$. c) 8. d) $4\pi R^2$. e) 4. f) $\pi(3+\sqrt{2})$. g) $\sqrt{6}-\sqrt{2}/3$. h) $9\pi\sqrt{6}$.

06) $\frac{k\pi}{12}(17^{3/2} - 5^{3/2})$.

07) Observe que este caso $\overline{F}\cdot\breve{n}$ resulta constante.

08) Observe que siendo S plana $\breve{n}$ es constante.

10) a) $224\pi/3$.
   b) 32π.
   c) $\dfrac{5618}{15}$ con $\breve{n}$ orientado desde S hacia el plano xz.
   d) $\dfrac{136}{3}$ con $\breve{n} / \breve{n}\cdot(0,0,1) > 0$.
   e) $46-\pi$.

11) 16/3 con $\breve{n}$ orientado desde S hacia el plano x,z.

12) 64 con $\breve{n} / \breve{n}\cdot(1,0,0) > 0$.

14) 24.

15) 8/3, superficie orientada hacia z^+.

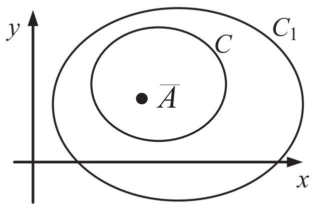
16) $\pi/2$, Σ orientado hacia z^+.

17) 12π.

T.P. N° 11

01) Por ejemplo: Área(D) $= \oint_{\partial D^+} x\,dy$; también, Área($D$) $= -\oint_{\partial D^+} y\,dx$.
   a) $ab\pi$.   b) 3π.   c) π.

02) 1/30.
03) $\pi/2$.
04) -20.
05) 81/5.
06) a) 3.   b) 0 .
07) 24.
08) -33π.
09) $384\pi-138$.
10) Se puede demostrar aplicando el teorema de Green, considerando las hipótesis adecuadas para la curva.
11) $\phi(-1/3,-1)=20/9$ es máximo local, $\phi(1/3,-1)=16/9$ es mínimo local.
12) -4π.
13) Sugerencia: considere otra curva C_1 según se indica en el dibujo y aplique Green en la región D entre ambas curvas. De esta manera podrá demostrar que



$$\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{s} = \oint_{C_1^+} \bar{f}\cdot d\bar{s}\text{; es decir,}$$

el resultado de la circulación rodeando $\bar{A}$ no depende de la curva. Así, si el cálculo con una C cualquiera resulta 0 , todas las circulaciones en camino cerrado serán nulas, entonces $\bar{f}$ es campo de gradientes. Si C no rodea al punto y $\bar{A} \notin C$, aplicando Green puede demostrar que la circulación es nula.(*)

(*) Cuando C rodea al punto no se puede aplicar Green pues $\bar{f} \notin C^1$ en $\bar{A}$.

14) No admite función potencial.
Sugerencia: calcule $\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{s}$ por ejemplo con $C:\ 4x^2+y^2=1$.

15) Tenga en cuenta las hipótesis del teorema, en especial respecto de la superficie.

16) Sugerencia: analice la matriz jacobiana y circule a lo largo de una circunferencia con centro en $\bar{0}$ y radio cualquiera. $U(x,y)=k\,q/r$ con $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

17) $U(x,y,z)=k\,q/r$ con $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

18) a) No. b) No. c) No. d) Si.

19) Demostraciones a cargo del lector, aplicando definiciones y teoremas.

20) 21, circulando en el sentido $(6,0,0)\to(0,3,0)\to(0,0,2)\to(6,0,0)$.

21) 4π , circulando en el sentido $(2,2,0)\to(2,0,2)\to(2,-2,0)\to(2,0,-2)\to(2,2,0)$.

22) $6\pi-16/3$.

23) 18.

24) 24, $\breve{n}$ saliente del cuerpo, $g\in C^1$.

25) 4π , considerando versor normal a S tal que $\breve{n}\cdot(0,1,0)>0$.

26) 0 .

27) $25\pi/12$, con $\breve{n}\,/\,\breve{n}\cdot(0,0,1)>0$.

28) Sugerencia: cuando *S* no encierra a $\overline{A}$ aplicando el teorema el flujo resulta nulo; si *S* encierra al punto $\overline{A}$ use una superficie auxiliar entre S y el origen y aplique el teorema al cuerpo *H* que tiene como frontera los puntos de ambas superficies.

29) $4\pi k\,q$, el resultado no cambia para toda superficie suave a trozos que rodee al origen.[(#)]

30) Sugerencia: aplique el teorema de la divergencia.

31) Sugerencia: aplique el teorema de la divergencia y recuerde que si el integrando es mayor o igual a cero el resultado de la integral también lo es.

32) 12π , con $\breve{n}\,/\,\breve{n}\cdot(0,0,1)>0$.

33) 0 .

34) $\bar{f}(x,y,z)=(z+(5x-yx^2)/2\ ,\ (5y-xy^2)/2\ ,\ 2xyz-5z)$.

35) $324\pi/5$.

36) $a=1,\ b=-3$; es un mínimo local.

T.P. N° 12

01) a) $y\ln|x|-y+x=0$. b) $y^2=x^2+Cx$. c) $\mathrm{tg}(y/x)=1+\ln|x|$. d) $y\ln|y|+Cy+x=0$.

02) $x^2+y^2=K\,y$.

03) $y^2-x^2+2xy+2x+6y=C$ con $x+y+3\neq 0$.

04) a) $x^2y+\mathrm{sen}(y)=C$. b) $2x+2y-x^2y^2+1=0$. c) $3x^2y-xy^3+2y^2=C$.
d) $y=\dfrac{x}{x+C}$. e) $\ln|x|=\mathrm{C}+\dfrac{\mathrm{y}^2}{x}$. f) $y^4+y^5\,\mathrm{sen}(x)=C$.

05) $y=\left(C+\ln(x)\right)e^{-1/x}$.

(#) Se supone $\bar{0}$ interior a un cuerpo *H*, la superficie es la frontera de *H*, $\breve{n}$ saliente de *H*.

06) a) $y = Ae^{-4x}\cos(3x) + Be^{-4x}\operatorname{sen}(3x)$.

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} - 2^{-1}$.

c) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} e^{x} - xe^{x} + x + \dfrac{3}{2}$.

d) $y = C_1 \operatorname{sen}(x) + C_2 \cos(x) + x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\ln(|\cos(x)|)$.

e) $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + x e^{x}\ln(|x|)$.

f) $y = C_1 e^{-x} + C_2 - \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$.

07) $C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 2x$.

08) a) $y = 2e^{-x} + 2e^{2x} + 2x - 2x^2 - 3$. b) $y = \dfrac{1}{12}e^{-x} + \dfrac{2}{3}e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{3x}$

c) $y = \dfrac{e^{-x}}{10}\left(3\cos(x) + 11\operatorname{sen}(x)\right) + \dfrac{1}{10}\operatorname{sen}(2x) - \dfrac{3}{10}\cos(2x)$

d) $y = x - 1 + e^{x} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$. e) $y = 1 - 2x - 2e^{-x} + 3e^{x}$.

09) $y = C_1\cos(x) + C_2\operatorname{sen}(x) + 2x^2$.

10) a₁) En metros:

$$x(t) = \tfrac{1}{100}[5 - 5e^{-2t}\cos(5t) - 2e^{-2t}\operatorname{sen}(5t)] =$$

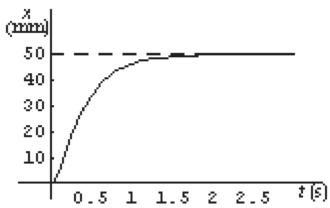
$$= \tfrac{1}{100}[5 - \sqrt{29}\, e^{-2t}\operatorname{sen}(5t + \operatorname{arctg}(5/2))]$$

$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ m $= 50$ mm, oscilación amortiguada.

a₂) En metros:

$$x(t) = \tfrac{1}{100}\left(5 - \tfrac{9}{4}e^{-29t/3} - \tfrac{29}{4}e^{-3t}\right)$$

$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ m $= 50$ mm, sin oscilaciones.



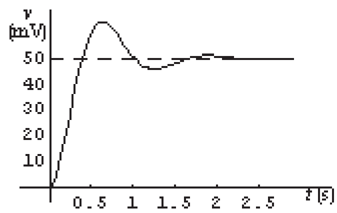
b) $[x'] = \text{m/s}$, $[x''] = \text{m/s}^2$, $[M] = \text{kg}$, $[k] = \text{N/m}$, $[d] = \text{N s / m}$.

11) En volts:

$$v(t) = \tfrac{1}{100}[5 - 5e^{-2t}\cos(5t) - 2e^{-2t}\operatorname{sen}(5t)] =$$

$$= \tfrac{1}{100}[5 - \sqrt{29}\, e^{-2t}\operatorname{sen}(5t + \operatorname{arctg}(5/2))]$$

$v(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.05$ V $= 50$ mV, con oscilación amortiguada.



12) $0 < k < 6$.

13) Respuestas en forma cartesiana, con líneas orientadas según $\bar{f}$ en cada punto:

a) $(x - y)(x + 2y)^2 = K$. c) $y = Kx^2$.

b) $y^2 - x^2 = K$. d) $ky^2 - x^2 = K$.

<u>Comentario</u>: Observe que para $k = 1$ las respuestas "b" y "d" coinciden pero los campos son distintos; es decir, la forma cartesiana de las líneas de campo <u>no permite</u> deducir de qué campo vectorial son las líneas que se están describiendo.

e) Excluido el origen, familia de semirectas que parten (si $k\,q > 0$) del origen o llegan (si $k\,q < 0$) al origen en el plano *xy*.

f) Ídem "e" en el espacio *xyz*.

g) Conviene el planteo paramétrico (ver a continuación).

h) $\dfrac{x-A}{2} = y = \dfrac{z-B}{3}$; todas las rectas de $\Re^3$ dirigidas y orientadas por (2,1,3).

Planteo paramétrico, imponiendo $\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)$ sólo se obtienen respuestas relativamente sencillas para:

a) $\bar{X} = (C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}\ ,\ C_1 e^t - C_2 e^{-2t}) \wedge t \in \Re$.

b) $\bar{X} = (C_1 e^t + C_2 e^{-t}\ ,\ C_1 e^t - C_2 e^{-t}) \wedge t \in \Re$.

c) $\bar{X} = (C_1 e^{t/2}, C_2 e^t)$ con $t \in \Re$.

g) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C_3 e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y = C_1 e^t - \frac{1}{2}(C_2 - C_3\sqrt{3})\, e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{1}{2}(C_2\sqrt{3} + C_3)\, e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ z = C_1 e^t - \frac{1}{2}(C_2 + C_3\sqrt{3})\, e^{-t/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{2}(C_2\sqrt{3} - C_3)\, e^{-t/2}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{cases}$ con $t \in \Re$.

h) $\bar{X} = (C_1 + 2t, C_2 + t, C_3 + 3t)$ con $t \in \Re$.

Los otros casos son muy complicados; por ejemplo, para el campo electrostático plano sería:

e) $\bar{X} = \left(\dfrac{A(3kq)^{1/3}}{\sqrt{A^2+B^2}}\, t^{1/3}\ ,\ \dfrac{B(3kq)^{1/3}}{\sqrt{A^2+B^2}}\, t^{1/3} \right)$ con $\begin{cases} t>0 \text{ si } kq>0 \\ t<0 \text{ si } kq<0 \end{cases}$ (*)

Una parametrización simple para $k\,q > 0$ es $\bar{X} = \overbrace{(C_1 u, C_2 u)}^{\bar{g}(u)}$ con $u > 0$; pero esta forma no cumple con la ecuación (1).
Es decir, la representación geométrica de las líneas sigue siendo la misma (semirrectas orientadas alejándose del origen) pero se perdió la relación con $\bar{E}$; a esta última también se podría llegar desde $\bar{f}(x,y) = (x,y)$ que claramente no es el campo $\bar{E}$ original.

Para trabajar en base a trayectorias ortogonales, sería por ejemplo el ítem 13d con $k = 1$; en este caso, suponiendo que $\phi(x_o, y_o) = \phi_o$ es el valor del potencial que físicamente conviene imponer en el punto (x_o,y_o), resultan:

Familia de líneas equipotenciales: $\frac{1}{2}x^2 y^2 - \frac{1}{2}x_o^2 y_o^2 + \phi_o = C$.

Familia de líneas de campo: $y^2 - x^2 = K$, orientadas según $\bar{f}$ en cada punto.

(*) Son semirrectas orientadas (sentido de arcos crecientes) que "salen" del origen en el caso de $k\,q > 0$, y llegan cuando $k\,q < 0$; la forma especial del resultado surge de la imposición $\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)$.

La respuesta contempla las líneas del campo generado por una carga eléctrica puntual ubicada en $\bar{0}$, en ambos casos: carga *q* positiva o negativa. Siendo *k* una constante del tipo $1/(4\,\pi\,\varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$ (permitividad) es una constante que depende del medio (caso de dieléctrico lineal).

14) Recuerde que, bajo ciertas hipótesis, $\bar{f} = \nabla\phi$ es ortogonal en cada punto al conjunto de nivel de ϕ que pasa por ese punto.

15) a) $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}e^{-t} - \frac{171}{170}e^{4t} - \frac{5}{17}\cos(t) - \frac{3}{17}\operatorname{sen}(t) - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{5}e^{-t} + \frac{114}{85}e^{4t} + \frac{1}{17}\cos(t) + \frac{4}{17}\operatorname{sen}(t) \end{cases}$.

b) $(x,y,z) = (v_x t, 0, v_z t - \frac{1}{2}gt^2)$.

c) $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} \\ y = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + \cos(t) \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + (2/3)\, C_2 e^{3t} \\ y = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{-t} \\ z = -C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} - C_3 e^{-t} \end{cases}$.

e) $\begin{cases} y_1 = 3 - 2e^{-t} \\ y_2 = e^{-t} \\ y_3 = e^{-t} - 3 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} x = e^{2t} + e^{3t} + t + t^2 \\ y = 2e^{2t} + t + 1 \end{cases}$.